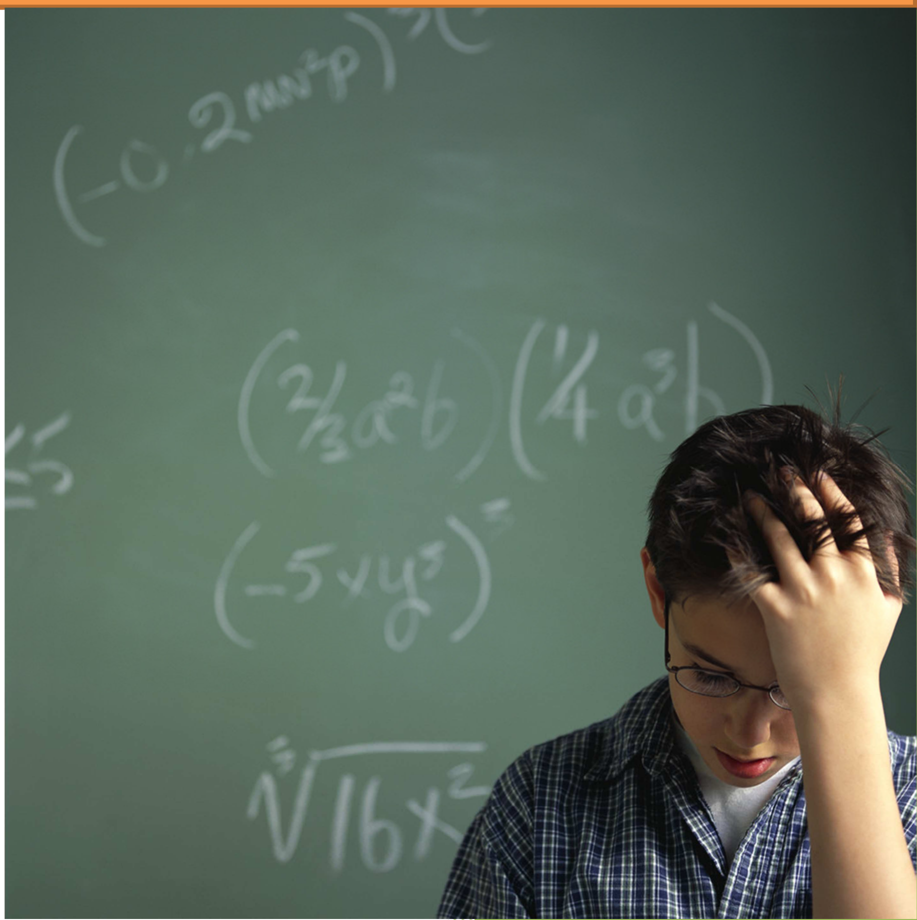
2011 год

Высшая математика для чайников. Производные и дифференциалы.



ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

$\int f(x)dx$

Виосагмир И.А.

Производные и дифференциалы

2011 год

viosagmir@gmail.com

Введение

Приветствую Вас в моей второй книге «Высшая математика для чайников. Производный и дифференциалы». Честно говоря, не думал, что моя первая книга станет такой успешной ☺.

Мой язык написания отличается от всех официальных изданий. Это касается не только математики, но и всех других научных книг. Я как бы присутствую с читателем, даю советы и поддерживаю. При таком раскладе книга читается намного проще. В некоторых моментах вы можете расслабиться и просто почитать.

Хорошо ли это? Я думаю, что да ☺. Официальный язык порядком изматывает. Поэтому я и применяю в моих изданиях простую речь. И не обращайте внимания на то, что я много говорю. Вам же лучше, отдохнете…

Теперь про данное издание. Книга будет насыщенной и понятной, это я вам обещаю. Первая глава посвящена самым общим понятиям о дифференцировании. Мы в ней повторим школьный курс и постепенно будем переходить от элементарных примеров к более сложным.

Ну, что же, господа!? Поехали ☺!

С Уважением, Ваш Виосагмир И.А.

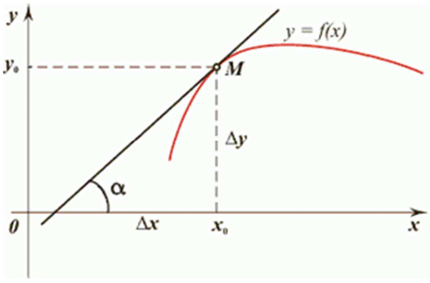
Содержание

Глава 1. Самое главное о производной.

Содержание:

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. *Приращением* этой функции в точке x_0 называется функция аргумента Δx

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$



Разностное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ также является функцией аргумента Δx.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (если он существует).

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Что такое простейшие функции, я писать не буду. В моей первой книге все подробно описано и даны примеры. Чуть ниже вы видите таблицу производных простейших функций. Она дается в 9 – 10 классах, и ее все долго и нудно учат. Я вам рекомендую сделать так же. Потратьте время на то, что бы она навсегда осталась у вас в голове.

Таблица производных

1) $(x^a)' = ax^{a-1}$ (a – любое число)

2) $(\sin x)' = \cos x$

3) $(\cos x)' = -\sin x$

4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

5) $(a^x)' = a^x \ln a$

6) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

7) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $(x \neq \pi n, n \epsilon Z)$

8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$

9) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$

10) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

11) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

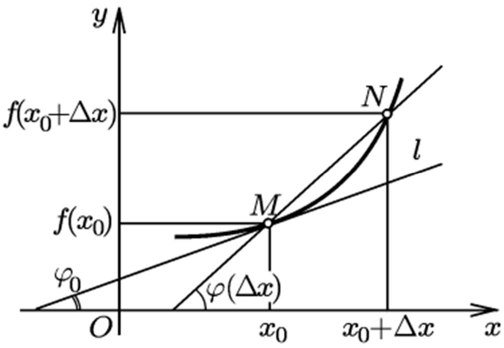
4') $(\ln x)' = 1/x$ $(x > 0)$

5') $(e^x)' = e^x$

1. Физический смысл

Производная $f'(x_0)$ — это скорость изменения функции $y = f(x)$ в точке x_0 (иными словами, скорость изменения зависимой переменной y по отношению к изменению независимой переменной x в точке x_0). В частности, если x — время, $y(x)$ — координата точки, движущейся по прямой, в момент x, то $f'(x_0)$ — мгновенная скорость точки в момент времени x_0.

2. Геометрический смысл



Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Точки M и N имеют следующие координаты: $M\big(x_0, f(x_0)\big)$, $N\big(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)\big)$. Угол между секущей MN и осью Ox обозначим $\varphi(\Delta x)$.

Определение

Если существует $\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$, то прямая l с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \varphi_0$, проходящая через точку $M\big(x_0, f(x_0)\big)$, называется *касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке M.

Теорема 1

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$, то график функции имеет в точке $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ касательную, причем $f'(x_0)$ является угловым коэффициентом касательной, т.е. уравнение касательной записывается в виде

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

3. Односторонние производные

Если существуют

$$\lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

То он называется *правой* (или *левой*) *производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0 + 0)$ (или $f'(x_0 - 0)$). Обратно: если существует $f'(x_0)$, то существуют $f'(x_0 + 0)$ и $f'(x_0 - 0)$, причем $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0)$.

4. Правила дифференцирования

Теорема 2

Если $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x_0, то сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии $v(x) \neq 0$) также имеют производные в точке x_0, причем в точке x_0справедливы равенства

$$(u+v)' = u' + v' \qquad (u-v)' = u' - v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Ну что же, имея эти 4 правила мы уже что-то можем посчитать. Я имею ввиду простые функции. Это начало 9-10 класса. Давайте все повторим, что бы у вас это уже больше никогда не вызывало вопросов. Начнем с примеров.

№1. Найти производную функции

$$y = 2x$$

Решение:

$$y' = (2x)' = \langle (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \rangle = 2 \cdot x' = \langle (x^a)' = ax^{a-1} \rangle = 2 \cdot (x^1)' = 2 \cdot 1 \cdot x^0 = 2$$

Решение написано ну уж очень подробно. Здесь предусмотрено все! Это элементарнейшие примеры. Запомните, что константа всегда выносится!

№2. Найти производную функции

$$y = x^2$$

Решение:

$$y' = (x^2)' = \langle (x^a)' = ax^{a-1} \rangle = 2x^{2-1} = 2x$$

Все то же самое, что и в прошлый раз.

№3. Найти производную функции

$$y = 2 + x^2 + x^3 + x^4$$

Решение:

$$y' = (2 + x^2 + x^3 + x^4)' = \langle (u + v)' = u' + v' \rangle = 2' + (x^2)' + (x^3)' + (x^4)'$$
$$= \langle (x^a)' = ax^{a-1} \rangle = 0 + 2x + 3x^2 + 4x^4$$

Чуть объемнее, но тоже все одно и то же.

№4. Найти производную функции

$$y = \frac{2 + x^3 + 2x}{\sin x}$$

Решение:

Здесь хотя бы что-то есть ☺.

$$y' = \left(\frac{2 + x^3 + 2x}{\sin x}\right)' = \left\{\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right\} = \frac{(2 + x^3 + 2x)' \cdot \sin x - \sin' x \cdot (2 + x^3 + 2x)}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{(0 + 3x^2 + 2) \cdot \sin x - \cos x \cdot (2 + x^3 + 2x)}{\sin^2 x}$$

Дальше не хочется считать. Главное, что бы вы поняли, как мы это все получили. Если непонятно, то просмотрите первые три примера. Если и они не понятны, тогда открывайте учебник 9-10 класса и читайте там. Книга называется «Высшая математика для …», а не «Повторение школы».

№5. Найти производную функции:

$$y = \sin x \cdot x^6$$

Решение:

$$y' = (\sin x \cdot x^6)' = \{(uv)' = u'v + uv'\} = \sin' x \cdot x^6 + \sin x \cdot (x^6)' = x^6 \cos x + 6x^5 \sin x$$

Тоже все просто.

№6. Найти производную функции

$$y = \operatorname{tg} x + \frac{e^x}{1 + x}$$

Решение:

$$y' = \left(\operatorname{tg} x + \frac{e^x}{1+x}\right)' = (\operatorname{tg} x)' + \left(\frac{e^x}{1+x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(e^x)'(1+x) - (1+x)'e^x}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(1+x)e^x - e^x}{(1+x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{xe^x}{(1+x)^2}$$

Как видите, функция большая, а производная берется легко.

№7. Найти производную функции

$$y = \frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 1}$$

Решение:

$$y' = \frac{(2x^2-1)'(2x^2+1) - (2x^2+1)'(2x^2-1)}{(2x^2+1)^2} = \frac{4x(2x^2+1) - 4x(2x^2-1)}{(2x^2+1)^2}$$
$$= \frac{4x(2x^2+1-2x^2+1)}{(2x^2+1)^2} = \frac{8x}{(2x^2+1)^2}$$

Все просто ☺. Прежде чем идти дальше, советую выучить таблицу производных, иначе вам будет сложно. На этом мы заканчиваем считать производные от простых функций.

5. Производная сложной функции

Теорема 3

Если функция $t = \varphi(x)$ имеет в точке x_0 производную $\varphi'(x_0)$, а функция $y = \psi(t)$ имеет в точке $t_0 = \varphi(x_0)$ производную $\psi'(t_0)$, то сложная функция $y = \psi(\varphi(x)) \equiv f(x)$ имеет производную в точке x_0, причем

$$f'(x_0) = \psi'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0).$$

№1. Найти производную функции

$$y = \sqrt{x^2 + 4}$$

Решение:

Перед нами собственной персоной сложная функция. Значит так, сейчас прошу “вчитаться” в каждое мое слово. Наша функция y состоит из двух функций. Внутренней - $\varphi(x) = (x^2 + 4)$, и внешней - $\psi(x) = \sqrt{x^2+4} = \sqrt{\varphi(x)}$. Надеюсь, это понятно. Идем дальше. Производную функции мы ищем так: сначала выписываем производную внутренней функции, потом – производную внешней функции, и наконец, мы их перемножаем. Получается что-то вроде этого:

$$y' = \varphi'(x) \cdot \psi'(x)$$

Давайте проделаем эти ходы!

$$\varphi'(x) = (x^2 + 4)' = 2x$$

$$\psi'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 4}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4}}$$

Напоминаю, что здесь использовалось лишь одно первое правило (в таблице производных). Таким образом, мы получаем:

$$y' = \varphi'(x) \cdot \psi'(x) = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

№2. Найти предел функции

$$y = (2x^3 + 5)^4$$

Решение:

У нас две функции: $y = 2x^3 + 5$ – внутренняя и $y = (2x^3 + 5)^4$ – внешняя. Производную ВСЕГДА начинаем искать в направлении от внутренней к внешней! Потом просто перемножаем их.

Вот, что у нас получится:

$$y' = ((2x^3 + 5)^4)' = (2x^3 + 5)' \cdot ((2x^3 + 5)^4)' = 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} \cdot ((2x^3 + 5)^4)'$$
$$= 6x^2 \cdot 4 \cdot (2x^3 + 5)^3 = 24x^2 \cdot (2x^3 + 5)^3.$$

Что мы сделали? Взяли производную внутренней функции и внешней, и их перемножили!

Если хотите, то могу расписать еще более подробно. Обозначим $2x^3 + 5 = u$; тогда $y = u^4$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y' = (u^4)'_u (2x^3 + 5)'_x = 4u^3(6x^2) = 24x^2 \cdot (2x^3 + 5)^3$$

Честно скажу, что первый вариант мне нравится больше, но, конечно же, за вами последний выбор, как решать.

№3. Найти предел функции

$$y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$$

Решение:

$$y' = \left(\operatorname{arctg} \sqrt{x}\right)' = \frac{1}{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{1 + x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)}$$

Расписывать где у нас u, а где v я больше не буду. Привыкайте делать с ходу ☺. Несомненно, у вас получится, если вы поняли сам механизм «работы». Но, на всякий случай повторюсь еще раз: берем производную внутренней функции, потом производную внешней функции, потом их перемножаем. Каждый раз расписывать это не стоит – где внутренняя функция, а где внешняя. Вы должны научится делать это в уме, хотя это может показаться и не слишком легким.

№4. Найти предел функции

$$y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$$

Решение:

$$y' = \left(\sqrt{\operatorname{arctg} x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \cdot (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

№5. Найти производную функции:

$$y = \frac{\sqrt{e^{2x^2}}}{\sin\sqrt{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

Решение:

Функцию придумал только что. Она большая, но зато, если вы с ней разберетесь, то вам уже никто не страшен ☺.

Начинаем раскручивать сверху (хотя можно и с внутренних функций, но в данном случае так легче). У нас есть дробь, поэтому давайте распишем от нее производную. Это сделать легко.

$$y' = \left(\frac{\sqrt{e^{2x^2}}}{\sin\sqrt{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}}\right)' = \frac{\left(\sqrt{e^{2x^2}}\right)' \cdot \left(\sin\sqrt{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}\right) - \left(\sin\sqrt{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}\right)' \cdot \left(\sqrt{e^{2x^2}}\right)}{\left(\sin\sqrt{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2}$$

Мы просто расписали по формуле. Теперь давайте рассматривать каждую функцию по отдельности.

$$y_1 = \left(\sqrt{e^{2x^2}}\right)'$$

Как и в прошлых примерах, выписываем (или делаем это в уме) подфункции.

$$u(x) = 2x^2, \quad m(x) = e^{2x^2}, \quad v(x) = \sqrt{e^{2x^2}}$$

Названия функций можете придумывать какими хотите. Это зависит только от вашего воображения! Теперь давайте "употребим" эти функции в благих целях.

$$u(x)=2x^2,\quad m(x)=e^{u(x)},\qquad v(x)=\sqrt{m(x)}$$

Ну, а теперь можем смело брать производные и перемножать.

$$(y_1)'=\left(\sqrt{e^{2x^2}}\right)'=u'(x)\cdot m'(x)\cdot v'(x)=(2\cdot 2x)\cdot\left(e^{u(x)}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{m(x)}}\right)$$

Заменяем $u(x)$ и $m(x)$ на соответствующие функции и получаем:

$$(y_1)'=\left(\sqrt{e^{2x^2}}\right)'=4x\cdot e^{2x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{e^{2x^2}}}$$

Вот мы и расписали первую функцию. Сложно? Нет! Но вы не должны так долго и нудно расписывать. Вы должны уметь это делать одной строчкой. Поэтому, берите примеры и решайте, пока не доведете это до автоматизма, иначе дальше будет сложно.

Ладно, это было небольшое лирическое отступление. Следующую функцию вы должны расписать так:

$$\left(\sin\sqrt{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x/2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}}\cdot\cos\sqrt{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Вот она – идеальная запись за несколько секунд ☺. Решайте, решайте и решайте, и тогда, у вас все будет отлично! *Everything will be amazing…*

Далее все просто: просто подставьте полученные результаты и упростите дробь.

$$y'=\left(\frac{\sqrt{e^{2x^2}}}{\sin\sqrt{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}}\right)'=\frac{4x\cdot e^{2x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{e^{2x^2}}}\cdot\left(\sin\sqrt{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x/2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}}\cdot\cos\sqrt{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\left(\sqrt{e^{2x^2}}\right)}{\left(\sin\sqrt{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2}$$

Смотря на эту запись, уже начинаешь задумываться, а правда ли, что эта книжка для “чайников”? Да, это правда! Вы видите, что производную от этой функции можно взять достаточно легко. От вас требуются только начальные навыки, а они даны в начале книги.

6. Производная обратной функции

Теорема 4

Если функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, имеет производную в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая определена в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ и имеет производную в точке y_0, причем

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ или } y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

№1. Найти производную обратной функции

$$y = \ln x$$

Решение:

$$y = \ln x \to x = e^y$$

Вот, что у нас получается:

$$y'_x = (\ln x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{y' \cdot e^y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Считаем здесь переменную y независимой, т.е. $y' = 1$.

№2. Найти производную обратной функции

$$y = \operatorname{arctg} x$$

Решение:

Функция $\operatorname{arctg} x$ является функцией, обратной функции $\operatorname{tg} x$, то есть ее производная может быть найдена следующим образом:

$$y = \operatorname{arctg} x \to x = \operatorname{tg} y$$

Вот, что у нас получается:

$$y'_x = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1 + (\operatorname{tg} y)^2}$$

Теперь нам осталось просто заменить $x = \operatorname{tg} y$.

$$y'_x = \frac{1}{1 + (\operatorname{tg} y)^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Таким образом, мы можем вывести формулы $\arccos x$, $\arcsin x$ и $\operatorname{arcctg} x$! То есть, если вы их забыли, то теперь всегда сможете их вывести сами ☺.

7. Производная параметрической функции

Теорема 5

Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $y = \mu(t)$ определены на некотором промежутке изменения переменной t, которую мы назовем параметром. Пусть функция $x = \varphi(t)$ является строго монотонной (возрастает или убывает) на этом промежутке. Тогда существует обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$, подставляя которую в уравнение $y = \mu(t)$, получим

$$y = \mu\left(\varphi^{-1}(x)\right) \equiv f(x)$$

Если по-русски, то из этого следует вот такая вещь:

Если функции $x = \varphi(t)$ *и* $y = \mu(t)$ *имеют производные* $\varphi'(t) \neq 0$ *и* $\mu'(t)$, *то*

$$f'(x) = \frac{\varphi'(t)}{\mu'(t)}_{|t=\varphi^{-1}(x)}$$

Сразу же рассмотрим примеры на эту тему. Советую формулу запомнить, так как такого типа задания часто попадаются на контрольной.

№1. Найти производную функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = \cos t \\ x = \sqrt{t} \end{cases}$$

Решение:

Пользуемся нашей формулой

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Запись y'_x означает, что мы берем производную функции y по x. То есть, остальные переменные на время превращаются в константы. Это наша будущая тема “Частные производные”. В общем, все делаем так, как написано в формуле.

$$y'_t = (\cos t)' = -\sin t$$

$$x'_t = \left(\sqrt{t}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

Теперь, все данные подставляем в формулу.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\sin t \cdot 2\sqrt{t}$$

Мы почти у цели! Осталось выразить t из нашей системы и подставить в получившуюся формулу. Выражаем там, где x, т.е. второе уравнение системы. Нам же нужна производная функции y по x!

$$x = \sqrt{t} \to t = x^2$$

Подставлям в нашу формулу и получаем:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\sin t \cdot 2\sqrt{t} = -\sin x^2 \cdot 2x$$

Все! Как видите, это легко, но немного неудобно. Поэтому, предлагаю второй способ решения данного примера. Можно решить систему, т.е. сделать так, что бы y зависел не от t, а от x.

$$\begin{cases} y = \cos t \\ x = \sqrt{t} \end{cases} \to t = x^2 \to \begin{cases} y = \cos x^2 \\ x = \sqrt{t} \end{cases} \to y = \cos x^2$$

Функция выражена! Следовательно, мы сразу можем брать производную сложной функции.

$$y' = (\cos x^2)' = (x^2)' \cdot (-\sin x^2) = -\sin x^2 \cdot 2x$$

Оказалось, что выразить и подставить намного проще, чем первый вариант. Поэтому, прежде чем решать посмотрите, можно ли упростить хотя бы как-то ☺.

№2. Найти y'_x и y''_{xx} в точке $(0; 0)$, если функция задана параметрически

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \ln \sin t \end{cases}$$

Решение:

Это хорошее и интересное задание с контрольной работы. Давайте для начала я скажу, что такое y''_{xx}. Грубо говоря, мы взяли производную первый раз и получили ответ, потом, берем производную от ответа. Это и будет двойная производная. Небольшой пример:

$$y = x^2 \to y'_x = 2x \to y''_{xx} = 2 \to y'''_{xxx} = 0$$

Конечно, x внизу можно и не писать, но я советую привыкать к такой записи. Делаем все то же самое, что и в прошлом примере!

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$x'_t = (\cos t)' = -\sin t$$

$$y'_t = (\ln \sin t)' = \cos t \cdot \frac{1}{\sin t}$$

y'_t мы взяли как сложную функцию $u' \cdot v'$, где $u = \sin t$, а $v = \ln u$. Таким образом,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{\cos t}{\sin^2 t}$$

Теперь, нужно найти t. Так как нам дана точка $(x, y) = (0, 0)$, то ее координаты просто подставляем в систему и находим t.

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \ln \sin t \end{cases} \to \begin{cases} 0 = \cos t \\ 0 = \ln \sin t \end{cases} \to t = \arccos 0 \to t = \frac{\pi}{2}$$

Таким образом, подставляем t в нашу формулу!

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} = -\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{2}} = -\frac{0}{1^2} = 0$$

Как видите, все базируется друг на друге. Если вы чего-то не знаете о тригонометрии, то вы не сможете решить этот пример. Поэтому, если чувствуете слабость, срочно открывайте учебник 10-11 класса и все повторяйте! Без этого никак не обойтись.

Теперь думаем, как найти y''_{xx}. Честно говоря, проще запомнить формулу, чем пытаться самому что-то вывести.

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

Соответственно, нам осталось найти только y''_{tt} и x''_{tt}.

$$y''_{tt} = \left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)' = \frac{(\cos t)' \sin t - (\sin t)' \cos t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin^2 t}$$

$$x''_{tt} = (-\sin t)' = -\cos t$$

Подставляем все под формулу и получаем:

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3} = \frac{-\frac{1}{\sin^2 t} \cdot (-\sin t) - \frac{\cos t}{\sin t} \cdot (-\cos t)}{(-\sin t)^3}$$

Параметр t остался таким же. Поэтому, можно упростить дробь и все подставить. Сейчас не хочется тратить на это время. Самое главное, что бы вы поняли смысл и почувствовали всю предесть математики. Да, вы умеете не много, но вы ведь что-то умеете! И это что-то не такое уж и простое ☺.

№3. Найти y'_x и y''_{xx} в точке $(1, 0)$, если функция задана параметрически

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = \arcsin t \end{cases}$$

Решение:

Здесь все то же самое, что и в прошлых примерах. Воспользуемся формулой

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Найдем y'_t

$$y'_t = (\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Найдем x'_t

$$x'_t = (e^t)' = e^t$$

Таким образом,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{e^t} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2} \cdot e^t}$$

Нужно найти y'_x в точке $(1, 0)$. То есть нам дана точка $(1, 0)$, что означает

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e^t = 1 \\ \arcsin t = 0 \end{cases} \rightarrow t = 0$$

Отлично! Теперь у нас есть $t = 0$, и мы можем его подставить в нашу формулу

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-t^2} \cdot e^t} = \frac{1}{\sqrt{1-0^2} \cdot e^0} = 1$$

Теперь осталось найти y''_{xx}. Воспользуемся формулой

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

x'_t и y'_t у нас уже есть. Следовательно, остается найти y''_{tt} и x''_{tt}.

$$x''_{tt} = (x'_t)' = (e^t)' = e^t$$

С y''_{tt} придется немного помучиться

$$y''_{tt} = (y'_t)' = \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2} \cdot e^t}\right)'$$

Перед нами производная от частного. Воспользавшись формулой, получаем

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}\cdot e^t}\right)' = \frac{1'\cdot\sqrt{1-t^2}\cdot e^t - \left(\sqrt{1-t^2}\cdot e^t\right)'\cdot 1}{\left(\sqrt{1-t^2}\cdot e^t\right)^2} = -\frac{\left(\sqrt{1-t^2}\cdot e^t\right)'}{\left(\sqrt{1-t^2}\cdot e^t\right)^2}$$

Дабы не тащить за собой всю дробь, посчитаем отдельно числитель

$$\left(\sqrt{1-t^2}\cdot e^t\right)' = \left(\sqrt{1-t^2}\right)'\cdot e^t + (e^t)'\cdot\sqrt{1-t^2} = -\frac{2t}{2\sqrt{1-t^2}}\cdot e^t + e^t\cdot\sqrt{1-t^2}$$
$$= e^t\left(\sqrt{1-t^2} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

Упрощать ничего не будем – нет смысла. Точка простая, и как мы выяснили, $t = 0$. Вот что у нас получается

$$y''_{tt} = -\frac{e^t\left(\sqrt{1-t^2} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)}{\left(\sqrt{1-t^2}\cdot e^t\right)^2} = -\frac{1}{1} = -1$$

Вот правильный ответ:

$$y'_x(1,0) = 1, \quad y''_{xx}(1,0) = -1$$

Сложно? Нет! Просто нужно терпение и хотя бы какая-нибудь внимательность.

8. Производная неявной функции

Для начала, давайте разберемся, что такое «неявная» функция. В общих чертах, это функция, у которой нельзя явно выразить x или y.

Например, такая функция

$$x^2e^{2y} - y^2e^{2x} = 0$$

Сколько бы вы ни тратили времени, вы не сможете явно выразить y через x или наоборот. Далее мы рассмотрим этот раздел более подробно. А пока что давайте просто решим пару примеров.

№1. Найти производную от функции $y(x)$

$$\operatorname{arctg}\frac{y(x)}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2(x)}$$

$y(x)$ означает то, что y зависит от x. По идее, мы должны выразить y и взять производную по x, как мы и делали во всех предыдущих случаях. Но мы этого не можем сделать. Поэтому берем производные сразу по x.

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{y(x)}{x}\right)'_x = \left(\ln\sqrt{x^2+y^2(x)}\right)'_x \to \left(\operatorname{arctg}\frac{y(x)}{x}\right)'_x = \left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2(x)\right)\right)'_x$$

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y'\cdot x-y}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2y\cdot y'}{x^2+y^2}$$

Понимаете в чем фишка? Допустим, нужно посчитать $\left(y(x)\right)'_x$. Пожалуйста!

$$\left(y(x)\right)'_x = y'$$

А можно посчитать и $\left(y^2(x)\right)'_x$

$$\left(y^2(x)\right)'_x = 2y\cdot y'$$

Почему так странно? Не забывайте, что y зависит от x. Если не можете себе представить этого, то напишите, допустим, что $y=2x$. Тогда у нас получится вот так

$$((2x)^2)'_x = 2\cdot(2x)\cdot(2x)'$$

Сделаем обратную замену и получим

$$((2x)^2)'_x = 2\cdot(2x)\cdot(2x)' = 2\cdot y\cdot y'$$

Очень надеюсь, что теперь все понятно. Никогда не забывайте, что если вам изначально дана функция, то она зависит от x! Очень многие про это забывают, и соответственно получают неправильный ответ. Я сам проходил через все это. Не забывайте!

Итак, вернемся к нашему примеру.

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y'\cdot x-y}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2y\cdot y'}{x^2+y^2}$$

После элементарных упрощений получим

$$\frac{y'x-y}{x^2+y^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}$$

$$y'x-y'y=x+y$$

$$y'=\frac{x+y}{x-y}$$

Все! Это и есть наш ответ ☺.

№2. Найти производную от функции

$$y^2+x^2=1$$

Функция неявная, следовательно пользуемся прошлым методом нахождения производной y'.

$$(y^2 + x^2)'_x = (1)'_x \to (y^2)'_x + (x^2)'_x = 0$$

Уже само слово «функция» должно вам напомнить про то, что y зависит от x. Если вам проще, то перепишите предыдущую запись в таком виде

$$(y^2(x))'_x + (x^2)'_x = 0$$

Итого, вот что у нас получится

$$2y \cdot y' + 2x = 0 \to y' = -\frac{x}{y}$$

Все ☺. Вот мы и посчитали.

Теперь я хочу рассказать вам об одной формуле. Она помогает нам забыть зависимость между y и x и помочь найти производную функции.

$$\boxed{d_{yx}(x, y) = -1 \cdot \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial f_y(x, y)}}$$

Значок ∂ в данном случае означает «частную производную». То есть $\partial f_x(x, y)$ – берем производную функции f по переменной x, а остальные переменные в функции – константы.

Ну, например функция $f = y^2 + x^2$. Тогда $\partial f_x(x, y)$ означает то, что мы берем производную функции f по переменной x, а переменная y – константа. Если вам так удобнее, то можете написать вместо нее $const$.

$$\partial f_x(x, y) = (const^2 + x^2)' = 0 + 2x = 2x$$

Производная от $const$ – ноль. Конечно, лучше все записывать в таком виде

$$\partial f_x(x, y) = (y^2 + x^2)'_x = 2x$$

$$\partial f_y(x, y) = (y^2 + x^2)'_y = 2y$$

Все это мы пройдем в дальнейшем еще раз. На тему «частные производные» будет отведена целая глава. Сейчас же нас интересует механизм нахождения.

№3. Найти производную функции

$$x^2 e^{2y} - y^2 e^{2x} = 0$$

Воспользуемся формулой

$$d_{yx}(x, y) = -1 \cdot \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial f_y(x, y)}$$

Найдем частные производные

$$\partial f_x(x, y) = 2xe^{2y} - 2y^2 e^{2x}$$

$$\partial f_y(x,y) = 2x^2e^{2y} - 2ye^{2x}$$

Итого

$$d_{yx}(x,y) = -1 \cdot \frac{\partial f_x(x,y)}{\partial f_y(x,y)} = -\frac{2xe^{2y} - 2y^2e^{2x}}{2x^2e^{2y} - 2ye^{2x}}$$

Упрощать я не буду. Сделайте это сами ☺.

Ну, вот вам два варианта того, как можно найти производную неявной функции. Выбирайте любой и действуйте! Если что-то непонятно, не волнуйтесь. Эта тема нас будет ждать еще впереди. Там мы начнем с самых элементарных примеров. Как я убедился, мои книги читают не только чайники, но и среднячки. Поэтому, эта глава именно для них.

№4. Найти производную функции

$$xy - 1 = 0$$

Этот пример я написал неслучайно. Функция не является неявной, то есть она явная!

$$y = \frac{1}{x}$$

Но, давайте представим себе, что мы этого не заметили и попробуем применить формулу для неявной функции.

$$d_{yx}(x,y) = -1 \cdot \frac{\partial f_x(x,y)}{\partial f_y(x,y)}$$

Найдем частные производные функции $f = xy - 1$

$$\partial f_x(x,y) = (xy)'_x = y$$

$$\partial f_y(x,y) = (xy)'_y = x$$

Получается

$$d_{yx}(x,y) = -\frac{y}{x} \to y' = -\frac{y}{x}$$

Теперь выразим из $xy - 1 = 0$ переменную y

$$y = \frac{1}{x}$$

Подставим его и получим

$$y' = -\frac{y}{x} = -\frac{\frac{1}{x}}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

Да! Мы получили то, что данная формула, как оказывается, верна не только для неявных функций, но и для явных в том же числе!

Это означает то, что если вы не знаете какая перед вами функция, вы можете применять формулу для неявной функции. Конечно, времени вы затратите больше, нежели воспользуйтесь элементарными формулами, но зато будете в себе уверены.

На сей ноте мы закончим первую главу «самое главное о производной». Сюда вошли самые элементарные вещи и не самые ☺. Во всяком случае вы должны были научиться дифференцировать сложные функции, обратные и параметрические.

Глава 2. Дифференциал функции

Содержание:

1. Дифференцируемость функции

Определение 1

Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha\,\Delta x,$$

где A — некоторое число, а α — функция аргумента Δx, бесконечно малая и непрерывная в точке $\Delta x = 0$. То есть

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha\,(\Delta x) = \alpha(0) = 0$$

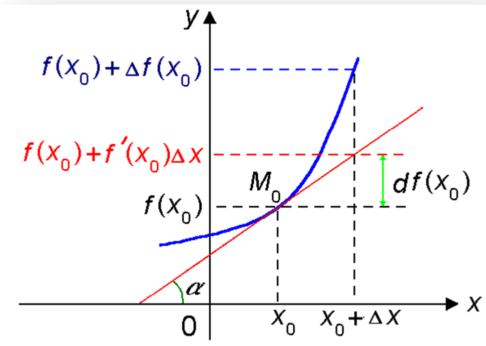


Рис. 1

Обратите внимание на рисунок №1. На α сейчас не обращайте внимания (он на рисунке представляется в виде угла). Прочтите определение, используя рисунок. Если все равно не понятно, то не волнуйтесь. Нижу будет пример.

Теорема 6

Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы существовала производная $f'(x_0)$.

Заметим то, что при этом $A = f'(x_0)$.

Определение 2

Дифференциалом (или первым дифференциалом) функции $y = f(x)$ в точке x_0 (дифференцируемой в этой точке) называется функция аргумента Δx: $dy = f'(x_0)\Delta x$.

При $f'(x_0) \neq 0$ дифференциал является главной (линейной относительно Δx) частью приращения функции в точке x_0.

№1. Найти дифференциал функции в точке $x = 2$ выделяя линейную относительно Δx часть Δy

$$y = x^2 - x + 3$$

Решение

Здесь нужно использовать наше первое определение. В данном случае, точка $x_0 = 2$. Поэтому мы можем записать Δy.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2 + \Delta x) - f(2)$$

$f(2 + \Delta x)$ и $f(2)$ мы можем посчитать, так как у нам дана сама функция $y = x^2 - x + 3$. Как вы понимаете, в роли x у нас выступают $2 + \Delta x$ и 2. То есть

$$f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2 - (2 + \Delta x) + 3$$

$$f(2) = 2^2 - 2 + 3 = 5$$

Следовательно,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2 + \Delta x) - f(2) = [(2 + \Delta x)^2 - (2 + \Delta x) + 3] - 5 = 3\Delta x + (\Delta x)^2$$

Отлично! Мы с вами нашли Δy. Нам же нужно найти dy. Если вы посмотрите внимательно второе определение, то поймете, что в данном случае $dy = 3\Delta x$, т.е. $(\Delta x)^2$ мы просто отбрасываем.

Разумеется, вы можете считать и не так. Далее я покажу вам способ намного проще. А пока что решим еще пару примеров.

№2. Представьте в виде $\Delta y = A\,\Delta x + \alpha\,\Delta x$ приращение функции y в точке $x = 0$. Запишите выражение для функции $\alpha(\Delta x)$.

$$y = e^x$$

Решение

Воспользуемся определением №1, которое говорит нам, что

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

То есть

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) - f(0) = e^{\Delta x} - 1$$

Теперь мы можем приравнять два равенства. Тогда мы получим, что

$$\Delta y = e^{\Delta x} - 1 = A\,\Delta x + \alpha\,\Delta x$$

Отлично! В конечном итоге, нам нужно найти $\alpha(\Delta x)$. Как это сделать? Выразить!

$$e^{\Delta x} - 1 = A\,\Delta x + \alpha\,\Delta x \to \alpha = \frac{e^{\Delta x} - 1 - A\,\Delta x}{\Delta x}$$

Остается найти только число A. Внимательно читаем первое определение… Да, там сказано, что A — некоторое число. Пусть $A = 1$, тогда

$$\alpha = \frac{e^{\Delta x} - 1 - \Delta x}{\Delta x}$$

Мы нашли α, но это еще не все. Нам нужно проверить условие

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha\,(\Delta x) = \alpha(0) = 0$$

Так проверим его

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha\,(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1 - \Delta x}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Так как числитель и знаменатель стремятся к нулю, можем применить правило Лопиталя.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1 - \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(e^{\Delta x} - 1 - \Delta x\right)'}{(\Delta x)'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{1} = \left[\frac{0}{1}\right] = 0$$

Все верно! Следовательно мы правильно нашли $\alpha\,(\Delta x)$. Окончательный ответ будет выглядеть так

$$\Delta y = \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \text{где } \alpha(\Delta x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\Delta x} - 1 - \Delta x}{\Delta x} & \text{при } \Delta x \neq 0 \\ 0 & \text{при } \Delta x = 0 \end{cases}$$

Теперь заметим то, что число A мы не можем брать какое угодно. Но не забывайте проверять условие! Это занимает не так много времени, если вы еще помните, что такое приделы функций. Если забыли правило Лопиталя, то срочно открывайте мою первую книгу и решайте ☺. А мы продолжаем набивать руку!

№3. Представьте в виде $\Delta y = A\,\Delta x + \alpha\,\Delta x$ приращение функции y в точке $x = \pi/2$. Запишите выражение для функции $\alpha(\Delta x)$.

$$y = \sin x$$

Решение

Все то же самое, что и в прошлый раз.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1$$

Теперь приравниваем два равенства

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1 = A\,\Delta x + \alpha\,\Delta x \to \alpha = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1 - A\Delta x}{\Delta x}$$

Вместо A берем число. В данном случае возьмем так же как и в прошлый раз. Пусть $A = 1$.

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1 - \Delta x}{\Delta x}$$

Теперь проверяем условие

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha\,(\Delta x) = \alpha(0) = 0$$

Здесь все легко

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha\,(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1 - \Delta x}{\Delta x} = \left[\frac{\sin\frac{\pi}{2} - 1}{0} = \frac{0}{0}\right]$$

Неопределенность! Так как числитель стремится к нулю и знаменатель стремится к нулю при $\Delta x \to 0$, то можем применить правило Лопиталя.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1 - \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1 - \Delta x\right)'}{(\Delta x)'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1}{1} = \left[\frac{0 - 1}{1}\right] = -1$$

Ошибка! И что же в таком случае делать? Смотрим на A! Так как в остальном мы уверены, то нужно подкорректировать это число.

Давайте подумаем. Рассмотрим числитель одной из дробей

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1 - \Delta x\right)' \to \cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1 \to 0 - 1$$

В конечном итоге нам нужно, что бы было не $0 - 1$, а просто 0. Надеюсь, вы это пониматете. Тогда рассуждаем. Что бы в конце было просто 0, нужно что бы вместо

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1$$

Было

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right)$$

Верно? Тогда, что бы получился данный косинус нужно что бы вместо

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1 - \Delta x\right)'$$

Было

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1\right)'$$

Отсюда следует, что число $A = 0$. Вот так вот ☺.

Соответственно, ответ будет таким

$$\Delta y = \alpha(\Delta x)\Delta x \text{ где } \alpha(\Delta x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - 1}{\Delta x} & \text{при } \Delta x \neq 0 \\ 0 & \text{при } \Delta x = 0 \end{cases}$$

Вы спросите, а как находить A? Это понятно интуитивно ☺. Попрактикуйтесь, и все будет *very cool*.

Теперь хочется добавить, что то, что вы сейчас решаете, маловероятно понадобиться вам. Но это развивает. Поэтому, если хотите, то можете пропустить пару страниц и бежать дальше. Но все же рекомендую потратить минут 20 на то что бы все разобрать. В общем, ваше дело ☺.

№4. Найдите приращение и дифференциал функции $y(x) = x^3 - x^2 + 1$ в точке $x = 1$ и вычислите их значение при $\Delta x = 1$.

Решение

Найдем приращение функции

$$\begin{aligned}\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1 + \Delta x) - f(1) = [(1 + \Delta x)^3 - (1 + \Delta x)^2 + 1] - [1^3 - 1^2 + 1] \\ = [1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \Delta x + 3 \cdot 1 \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - 1 - 2\Delta x - \Delta x^2 + 1] - 1 \\ = 3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3 - 2\Delta x - \Delta x^2 = \Delta x + 2\Delta x^2 + \Delta x^3\end{aligned}$$

При $\Delta x = 1$ приращение функции будет $\Delta y = 1 + 2 + 1 = 4$

Дифференциал функции будет представлен в виде

$$dy = \Delta x = 1$$

Определение 2

Дифференциалом независимой переменной x называется приращение этой переменной: $dx = \Delta x$. Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$dy = f'(x_0)dx$$

откуда

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

То есть производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна отношению дифференциала функции в этой точке к дифференциалу независимой переменной.

№1. Найти дифференциал функции y в точке $x = 2$ по формуле

$$y = x^2 - x + 3$$

Решение

Наша формула представлена в виде

$$dy = f'(x_0)dx$$

Следовательно, мы можем найти $f'(x)$, а в дальнейшем и $f'(x_0)$.

$$f'(x) = y' = 2x - 1$$

$$f'(x_0) = f'(2) = 4 - 1 = 3$$

Следовательно, по формуле, получаем, что

$$dy = f'(x_0)dx = 3dx = 3\Delta x$$

Разумеется, второй вариант намного проще чем первый ☺. Поэтому пользоваться мы будем именно им.

№2. Найти дифференциал функции $y = \sin(x^2)$:

a) В точке $x = x_0$
b) В точке $x = \sqrt{\pi}$
c) В точке $x = \sqrt{\pi}$ при $dx = -2$

Решение

- В точке $x = x_0$

Пользуемся формулой

$$dy = f'(x_0)dx$$

Для начала найдем $f'(x)$

$$f'(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$$

В точке $x = x_0$

$$f'(x_0) = 2x_0 \cdot \cos(x_0^2)$$

И, соответственно, дифференциал функции

$$dy = 2x_0 \cdot \cos(x_0^2)\, dx$$

И это все! А вы думали, что это сложно? Нет! Если действовать постепенно, по шагам, и никуда не бежать, то все очень даже просто. Т.е. грубо говоря, дифференциал это то же самое, что и производная. Но в конце мы должны приписать dx ☺.

- В точке $x = \sqrt{\pi}$

Пользуясь прошлыми вычислениями, получаем

$$dy|_{x=\sqrt{\pi}} = 2x \cdot \cos(x^2)\,dx = 2\sqrt{\pi} \cdot \cos\left(\sqrt{\pi}^2\right) dx = -2\sqrt{\pi}\,dx$$

Вот это есть идеальная запись! Вы всегда должны стремиться к этому, а не расписывать один пример на несколько страниц.

- В точке $x = \sqrt{\pi}$ при $dx = -2$

$$dy\Big|_{\substack{x=\sqrt{\pi} \\ dx=-2}} = 2x \cdot \cos(x^2)\,dx = 2\sqrt{\pi} \cdot \cos\left(\sqrt{\pi}^2\right) dx = -2\sqrt{\pi}\,dx = 4\sqrt{\pi}$$

№3. Найдите дифференциал функции y в точке x, если

$$y = \sqrt{x}$$

Решение

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

То есть просто считаем производную и дописываем dx.

№4. Найдите дифференциал функции y в точке x, если

$$y = \frac{1}{x}$$

Решение

$$dy = \ln x\,dx$$

№5. Найдите дифференциал функции y в точке x, если

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Решение

$$dy = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$$

Производная от сложной функции. Сначала берем производную от log, затем от корня, затем от x^2. Это мы уже проходили ☺.

№6. Найдите дифференциал функции y в точке x, если

$$y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

Решение

Видим модуль? Значит сразу рассматриваем два случая!

- Под модульное выражение > 0

То есть, когда

$$\frac{x-1}{x+1} > 0$$

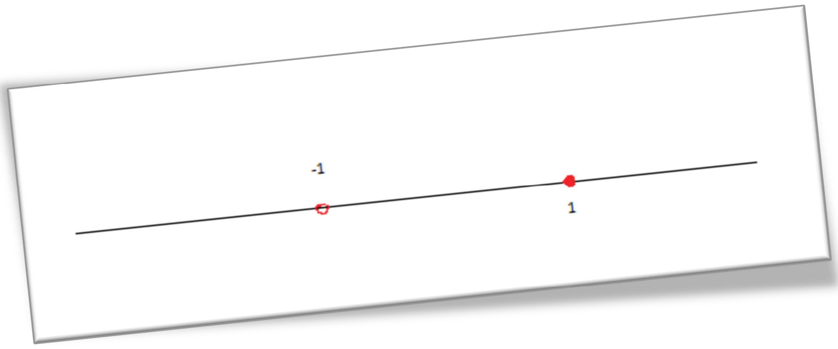
Можем оставить так, но все же давайте найдем промежутки. У нас есть два корня:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Один из корней находится в знаменателе, следовательно это будет выколотая точка.

$$\begin{cases} x = 1 & -\text{целая} \\ x = -1 & -\text{выколотая} \end{cases}$$

Теперь нанесем точки на ось Ox



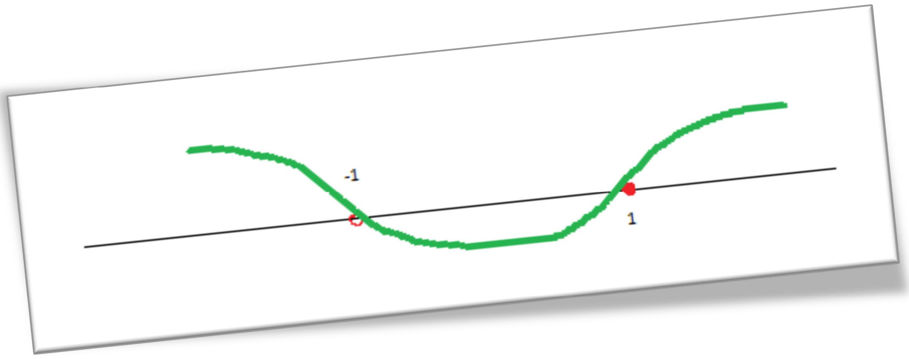
Точки нанесли… Теперь нужно определить где функция положительна, а где отрицательна. У нас есть три промежутка

$$(-\infty, -1), (-1, 1], [1, +\infty)$$

Проверим, какой знак принимает функция на этих промежутках. Например, промежуток $(-\infty, -1)$. Возьмем число -50 или -100. В общем это число должно входить в промежуток. Тогда,

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{-100-1}{-100+1} > 0$$

Так проверяем все промежутки и получаем такой рисунок



Получаем два случая для модуля.

$$\frac{x-1}{x+1} > 0 \; when \; x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$$

$$\frac{x-1}{x+1} < 0 \; when \; x \in (-1, 1]$$

Мы же рассматриваем пока только первый случай. То есть, когда

$$\frac{x-1}{x+1} > 0$$

Отлично! Когда дробь больше нуля, мы можем раскрыть модуль. Тогда наша функция принимает вид

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}$$

Найдем дифференциал

$$dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{x-1} dx$$

- Под модульное выражение < 0

То есть

$$\frac{x-1}{x+1} < 0 \; when \; x \in (-1, 1]$$

Если под модульное выражение отрицательно (а оно отрицательно), то при раскрытии модуля появляется минус. То есть наша функция преобразуется в функцию

$$y = -\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}$$

Тогда мы можем найти дифференциал

$$dy = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x-1}dx$$

Теперь мы можем получить окончательный ответ.

$$dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x-1}dx\ when\ \ x \in (-\infty,-1) \cup [1,+\infty)$$

$$dy = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x-1}dx\ when\ x \in (-1,1]$$

Вот мы и вспомнили 11 класс ☺. Конечно, можно было и не искать промежутки, но мы же никуда не спешим. Мы постепенно покоряем науку. Мелкими шагами движемся к цели. А кто бежит, тот может и споткнуться, и даже упасть. Так что нам ничего не грозит. Хорошая штука философия ☺.

№6. Найдите дифференциал функции y в точке x, если

$$y = \arcsin\frac{x}{a}$$

Решение

$$dy = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\quad if -1 < x < 1$$

№7. Найдите дифференциал функции y в точке x, если

$$y = xe^{2x}$$

Решение

Найдем дифференциал

$$dy = [x'\cdot e^{2x} + x\cdot(e^{2x})']dx = [e^{2x} + 2xe^{2x}]dx = e^{2x}(1+2x)dx$$

№8. Найдите дифференциал функции y в точке x, если

$$y = x\sin x + \cos x$$

Решение

Найдем дифференциал ☺

$$dy = [x'\cdot\sin x + (\sin x)'\cdot x + (\cos x)']dx = [\sin x + \cos x\cdot x - \sin x]dx = x\cos x\,dx$$

№9. Найдите $dy_{|x=0}$ и $dy_{|x=1}$, если

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$$

Решение

$$dy_{|x=0} = \left(3 \cdot \frac{x^2}{3} - 2 \cdot \frac{x}{2} + 1\right) dx = (x^2 - x + 1)dx = 0^2 - 0 + 1 = 0$$

$$dy_{|x=1} = \left(3 \cdot \frac{x^2}{3} - 2 \cdot \frac{x}{2} + 1\right) dx = (x^2 - x + 1)dx = (1^2 - 1 + 1)dx = 1dx = dx$$

№10. Найдите $dy_{|x=0}$ и $dy_{|x=1}$, если

$$y = \ln(1 + x)$$

Решение

$$dy_{|x=0} = \frac{1}{1 + x} dx = 1dx = dx$$

$$dy_{|x=1} = \frac{1}{1 + x} dx = \frac{1}{2} dx$$

№11. Найдите $dy_{|x=0}$ и $dy_{|x=1}$, если

$$y = e^x$$

Решение

$$dy_{|x=0} = e^x dx = dx$$

$$dy_{|x=1} = e^x dx = edx$$

№12. Найдите $dy_{|x=0}$ и $dy_{|x=1}$, если

$$y = \sin\frac{\pi x}{2}$$

Решение

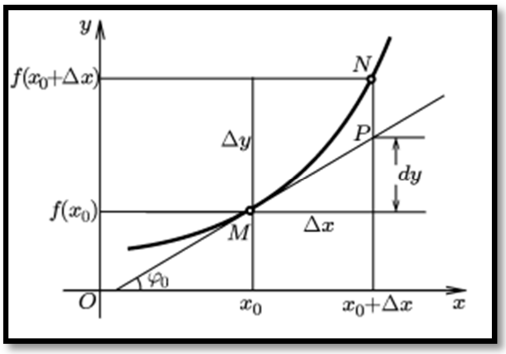
$$dy_{|x=0} = \frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \cos 0 \ dx = \frac{\pi}{2} dx$$

$$dy_{|x=1} = \frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi}{2} dx = 0$$

Отлично! Считать мы теперь умеем. Давайте перейдем к примерам, где нужно чертить и рисовать ☺. Для лучшего понимания рассмотрим пару примеров.

2. Геометрический и физический смысл

Геометрический смысл дифференциала функции нетрудно уяснить из рисунка (справа), на котором изображены график функции $y = f(x)$ (жирная линия) и касательная MP к графику в точке $M\big(x_0, f(x_0)\big)$. Дифференциал dy равен приращению линейной функции, графиком которой является касательная MP.



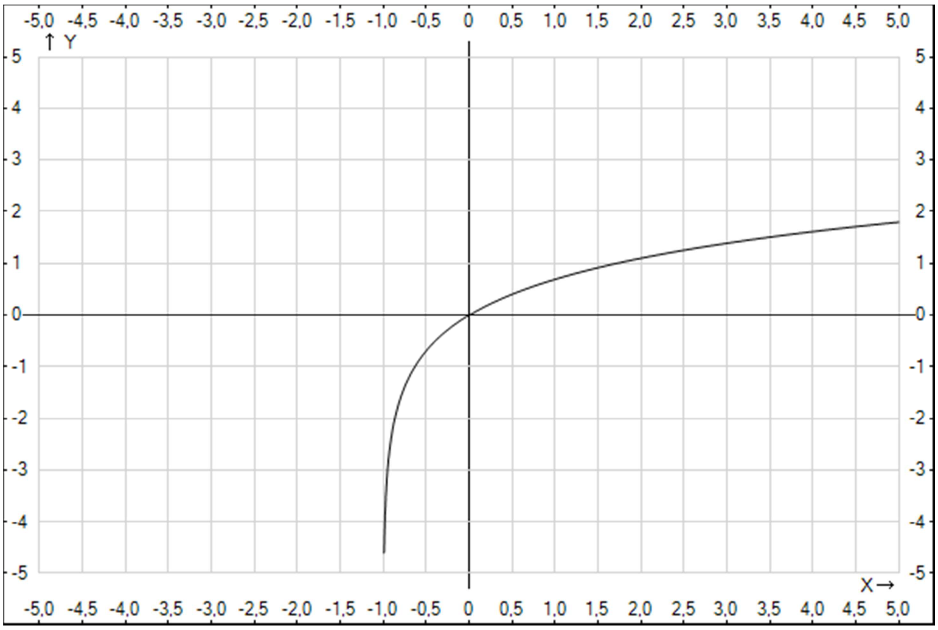
Если x — время, а $y = f(x)$ — координата на прямой в момент x, то дифференциал $dy = f'(x_0)\Delta x$ равен тому изменению координаты, которое получила бы точка за время Δx, если бы скорость точки на отрезке времени $[x_0, x_0 + \Delta x]$ была постоянной и равной $f'(x_0)$. Изменение скорости на этом отрезке приводит к тому, что, вообще говоря, $\Delta y \neq dy$. Однако на малых промежутках времени Δx изменение скорости незначительно и $\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x$.

№1. Постройте график функции $y = \ln(1 + x)$ и изобразите на графике dy при

$$x = 0, dx = 1$$

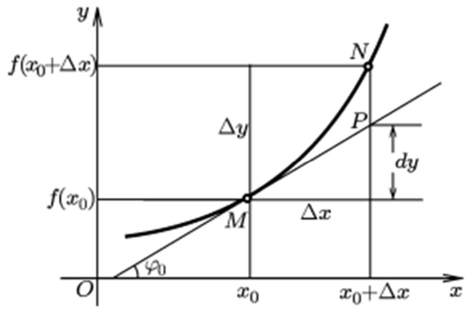
Решение

Как делать такие номера? Ну, прежде всего построим график.



Теперь вспомним пример графика, соответствующего определению №1

Графически в принципе все понятно. Теперь давайте посмотрим на это все с аналитической точки зрения.



$$dy\Big|_{\substack{x=0\\dx=1}} = \frac{1}{1+x}dx = \frac{1}{1+0}\cdot 1 = 1$$

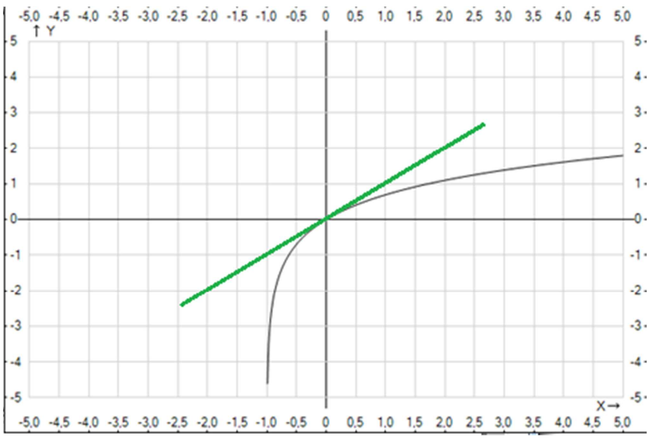
$$f(x_0) = \ln 1 = 0$$

Теперь нам необходимо найти касательную к графику. Напоминаю, что уравнение касательной представляется в таком виде

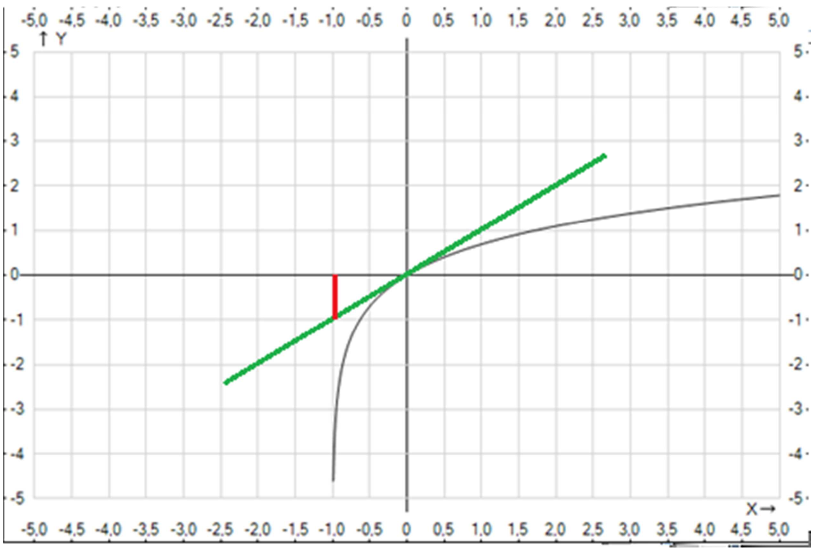
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

В итоге получается вот так

$$y = 0 + \frac{1}{0+1}(x - 0) \to y = x$$



$dy = 1$, как мы посчитали ранее. Изобразим его на графике.



Соответственно, красная линия это и есть dy.

3. Приближенные вычисления

А вы знаете, что можно использовать дифференциал для приближенных вычислений?

Так как $\Delta y \cong dy$ при малых Δx, т.е. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cong f'(x_0)\Delta x$, то

$$f(x_0+\Delta x)\cong f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

Эта формула позволяет находить приближенные значения $f(x_0+\Delta x)$ при малых Δx, если известны $f(x_0)$ и $f'(x_0)$. При этом погрешность при замене $f(x_0+\Delta x)$ правой части формулы $f(x_0+\Delta x)\cong f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ тем меньше, чем меньше Δx, и, более того, эта погрешность при $\Delta x\to 0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

№1. Заменяя приращение функции ее дифференциалом, найти приближенное значение

$$\sqrt{0{,}98}$$

Решение

Рассмотрим функцию $y(x)=\sqrt{1+x}$. В данном случае, это будет наша функция $f(x_0+\Delta x)$. То есть,

$$\sqrt{1+x}=f(x_0+\Delta x)\to x=-0{,}02$$

Верно? Ведь мы под корнем рассматриваем число $0{,}98$. $\sqrt{0{,}98}=\sqrt{1+x}\to x=-0{,}02$. То есть, число $-0{,}02$ это есть наше приращение, т.е. Δx.

Теперь нужно найти x_0

$$1+x_0+\Delta x=0{,}98\to x_0=0{,}98-1+0{,}02=0$$

Почему прибавили 1? У нас функция зависит не только от x. Все данные есть и, соответственно, мы можем воспользоваться данной формулой

$$f(x_0+\Delta x)\cong f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

$$y(0)=1,\qquad y(-0{,}02)=\sqrt{0{,}98},\qquad y'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\to y'(0)=\frac{1}{2}$$

Получается

$$y(-0{,}02)\approx y(0)+y'(0)(-0{,}02)=1-0{,}01=0{,}99$$

Итак,

$$\sqrt{0{,}98}\approx 0{,}99$$

№2. Заменяя приращение функции ее дифференциалом, найти приближенное значение

$$\sin 31°$$

Решение

Как вы уже догадались, здесь рассмотрим функцию

$$y = \sin x$$

Соответственно, приращение равно $1°$. Если вспомнить школьный курс, можно написать более красиво

$$1° = \frac{2\pi}{360} \approx 0{,}0175$$

Приращение есть. Теперь нужно выяснить чему равно x_0.

$$x_0 + \Delta x = 31° \to x_0 = 31° - 1° = 30°$$

Замечательно! Воспользуемся формулой

$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

$$y(30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}, \qquad y'(30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

В итоге получаем

$$\sin 31° \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\pi}{360} = 0{,}5151$$

Вот и все ☺. На самом деле, как видите, это совершенно не сложно. Возможно второй пример вам покажется более простым. Они все простые, если как следует разобраться.

4. Определение производных высших порядков

Последняя версия книги доступна по адресу → http://rutracker.org/forum/viewtopic.php?t=3418320

Периодически она обновляется. Поэтому последние версии ищите именно там.

Так же, Предел и непрерывность функции → http://rutracker.org/forum/viewtopic.php?t=3280108