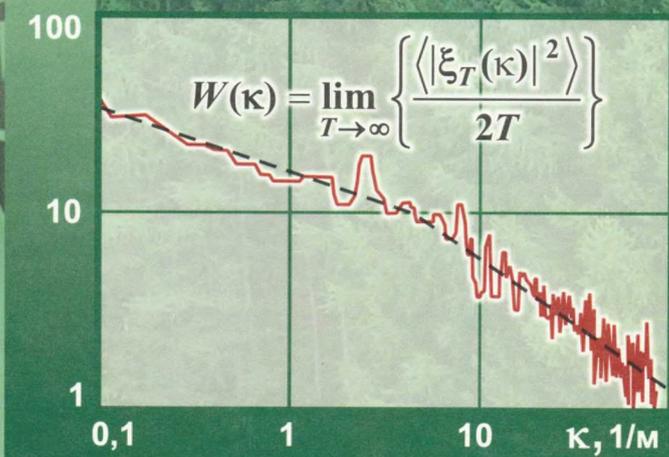




В.П. Якубов

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.П. Якубов

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА

*Рекомендовано УМС по физике
УМО по классическому университетскому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных
заведений, обучающихся по направлению 511500 – Радиофизика
и по специальности 013800 – Радиофизика и электроника*



Томск – 2006

УДК 621.37:519.21

ББК 32.841

Я 492

Я 492 **Якубов В.П.** Статистическая радиофизика: Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 132 с.

ISBN 5-89503-292-3

В учебном пособии на доступном и понятном языке показываются различия и единство описания случайных и детерминированных процессов, возможности их математического моделирования и использования для измерения, например, характеристик линейных и нелинейных систем, для передачи информации.

Учебное пособие содержит базовый минимум знаний и написан в первую очередь для радиофизиков – студентов и аспирантов, но может быть полезен преподавателям, научным сотрудникам и инженерам других направлений.

УДК 621.37:519.21

ББК 32.841

Рецензент: В. А. Б а н а х, докт. физ.-мат. наук,
зав. лабораторией ИОА СО РАН

*Издание оплачено из средств
благотворительного некоммерческого фонда
«Фонд содействия образованию и науке
Томского государственного университета»*

ISBN 5-89503-292-3

© В.П. Якубов, 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	7
Глава 1. Элементы общей теории случайных процессов.....	9
1.1. Понятие случайного процесса.....	9
1.2. Функция и плотность распределения	10
1.3. Многомерные распределения и их свойства	12
1.4. Статистическое усреднение и моментные функции.....	14
1.5. Функция корреляции и её свойства	17
1.6. Характеристическая функция и её свойства.....	18
1.7. Разложение характеристической функции по моментам	19
1.8. Кумулянтное разложение	20
1.9. Стационарность случайного процесса	21
1.10. Энергетический спектр. Теорема Винера – Хинчина.....	22
1.11. Эргодические случайные процессы.....	26
1.12. Дисперсия временного среднего. Выбор времени усреднения	27
1.13. Контрольные вопросы.....	28
Глава 2. Модели случайных процессов	29
2.1. Нормальные процессы	29
2.1.1. Характеристическая функция и плотность распределения.....	29
2.1.2. Центральная предельная теорема.....	31
2.1.3. Свойства нормального случайного процесса.....	32
2.1.4. Условная плотность нормального распределения. Предсказание случайных процессов.....	34
2.2. Марковские случайные процессы	37
2.2.1. Уравнение Смолуховского	37
2.2.2. Нормальные марковские случайные процессы.....	39
2.2.3. Диффузионные процессы. Уравнения Колмогорова.....	41

2.2.4. Процессы с независимыми приращениями.....	44
2.2.5. Белый шум и винеровский процесс	45
2.3. Дробовой шум.....	46
2.3.1. Распределение Пуассона	46
2.3.2. Пуассоновский поток дельта-импульсов	48
2.3.3. Параметрическая модель дробового шума.....	50
2.3.4. Среднее значение и функция корреляции дробового шума.....	52
2.3.5. Энергетический спектр дробового шума. Формула Шоттки.....	52
2.4. Тепловой шум	53
2.5. Фликер-шум	56
2.6. Контрольные вопросы.....	57
Глава 3. Линейные преобразования случайных процессов	58
3.1. Линейная фильтрация	58
3.2. Интегральные характеристики линейного фильтра	61
3.3. Преобразование белого шума линейным фильтром.....	61
3.4. Нормализация случайного процесса.....	63
3.5. Корреляция шумов на выходе линейных систем	64
3.6. Равенство случайных процессов.....	65
3.7. Условие непрерывности случайных процессов	66
3.8. Условия дифференцируемости случайных процессов	67
3.9. Свойства производной случайного процесса.....	68
3.10. Контрольные вопросы.....	70
Глава 4. Нелинейные преобразования случайных процессов	71
4.1. Корреляционная функция на выходе плавных нелинейностей. Двусторонний квадратичный детектор	71
4.2. Корреляционная функция на выходе кусочно-ломаных нелинейностей	74
4.3. Корреляционная функция на выходе предельного ограничителя	75
4.4. Корреляционная функция на выходе одностороннего линейного детектора.....	77
4.5. Корреляционная функция на выходе двустороннего линейного детектора.....	78

4.6. Энергетический спектр на выходе нелинейного элемента	79
4.7. Распределение процесса на выходе нелинейного элемента	82
4.7.1. Взаимнооднозначное преобразование	82
4.7.2. Двусторонний детектор	83
4.7.3. Односторонний детектор	84
4.8. Контрольные вопросы	85
Глава 5. Узкополосные случайные процессы	86
5.1. Понятия узкополосных и квазигармонических сигналов и случайных процессов	86
5.2. Аналитический сигнал	89
5.3. Корреляционная функция сопряженного процесса	91
5.4. Взаимная корреляция сопряженных процессов	92
5.5. Корреляция квадратурных составляющих	93
5.6. Распределение огибающей и фазы нормального узкополосного шума	95
5.7. Распределение огибающей смеси сигнала с шумом	97
5.8. Распределение фазы смеси сигнала с шумом	98
5.9. Теорема Котельникова	100
5.10. Контрольные вопросы	102
Глава 6. Прием сигналов в условиях шумов	103
6.1. Оптимальный фильтр	103
6.2. Согласованный фильтр	106
6.3. Корреляционный прием	109
6.4. Отношение правдоподобия и обнаружение сигнала	111
6.5. Критерии обнаружения	113
6.5.1. Критерии максимального правдоподобия и идеального наблюдателя	113
6.5.2. Критерий Неймана – Пирсона	115
6.6. Контрольные вопросы	116
Глава 7. Случайный волновой пучок и угловой энергетический спектр	117
7.1. Пространственные частоты для волновых полей	118
7.2. Контрольные вопросы	121

Глава 8. Элементы теории информации	122
8.1. Количественное определение информации.....	122
8.2. Средняя собственная и взаимная информация	124
8.3. Свойства средней собственной и взаимной информа- ции.....	125
8.4. Пропускная способность канала. Теорема Шеннона о помехоустойчивом кодировании	126
8.5. Контрольные вопросы.....	127
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	128
ЛИТЕРАТУРА	129

*Посвящается памяти профессора
Геннадия Александровича Пономарева*

ВВЕДЕНИЕ

В книге излагаются основы курса «Статистическая радиофизика», который читается автором в течение нескольких лет. Предметом изучения является описание флуктуационных явлений в радиофизике.

С этими явлениями мы встречаемся каждый раз, когда собираемся что-то измерить или изучить как можно точнее. Так, например, оказываются флуктуирующими (изменяющимися от измерения к измерению) ток или напряжение в радиотехнических цепях или напряженность поля электромагнитной волны, прошедшей атмосферу. Кажется, как будто сама природа сопротивляется её точным измерениям.

Прежде всего следует ответить на вопрос: каковы причины возникновения флуктуаций? Можно выделить, по крайней мере, три из них. Во-первых, это безграничность нашего мира и связей в нем. Во-вторых, это конечность миропонимания человека. В третьих – фундаментальная стохастичность (случайность), заложенная в микромире. Имеется в виду невозможность детерминистического описания процессов в микромире, наиболее ярко проявляющаяся в известных соотношениях неопределенности Гейзенберга. Перечисленные причины и их комбинации делают наш мир трижды случайным.

Проявляются случайности настолько часто, что скорее приходится удивляться, когда наблюдаются детерминированные процессы. Рассуждая философски, мы понимаем, что все дело, по-видимому, лишь в мере случайности в детерминистической картине мира. Например, напряжение на зажимах стабилизированного источника питания существенно более детерминировано, чем сигнал от космического аппарата, принимаемый радиоантенной.

На первый взгляд, случайности обладают лишь вредными, мешающими свойствами. Кажется, их можно использовать разве что только для радиомаскировки. А уж сохранению, передаче или извлечению информации с помощью радиофизических систем они и совсем не способствуют. Однако это не так и, более того, как мы убедимся в нашем курсе, флуктуационные процессы лежат в основе самой теории информации.

Если уж без флуктуационных процессов не обойтись, то тогда как же они измеряются и описываются? Можно ли вообще управлять случайностями: уменьшать, увеличивать или делать полезными? На эти и другие вопросы мы постараемся ответить в этой книге.

Хотя ее содержание направлено, главным образом, на описание флуктуационных процессов, встречающихся в радиофизике, многое из вошедшего в нее материала имеет более широкое применение.

Актуальность издания предлагаемого учебника для радиофизиков определяется необходимостью, с одной стороны, обновления учебной литературы с учетом изменяющихся современных подходов и расширяющихся применений и, с другой – желанием с учетом новых компьютерных технологий сделать курс возможно более практичным без уменьшения теоретической глубины. Его содержание находится в полном соответствии с установленным стандартом по направлению «Радиофизика» и по специальности «Радиофизика и электроника» и основано на более чем 20-летнем опыте преподавания этого курса на радиофизическом факультете Томского государственного университета.

В учебнике применена нумерация формул по главам. Каждая глава заканчивается контрольными вопросами.

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Понятие случайного процесса

В основе описания случайных процессов (СП) лежит вероятностный подход. Простейший вариант определения случайного процесса $\xi(t)$ состоит в определении его как однопараметрического семейства случайных величин. Параметром является время $t \in [0, T]$.

Другой равнозначный, но более наглядный подход состоит в определении случайного процесса как ансамбля его реализаций. Представим себе, что мы имеем N однотипных приборов, измеряющих некоторый параметр одного и того же процесса. Один из этих приборов (k -й) регистрирует зависимость $\xi_k(t)$, $t \in [0, T]$, $k = 1, 2, \dots, N$. Соответствующая этой зависимости функция называется реализацией случайного процесса. В общем случае все реализации вследствие порождающих случайности причин являются разными. Реализации, получаемые на N приборах, образуют ансамбль реализаций объёмом N . На рис. 1 в качестве примера изображены три реализации типичного случайного процесса.

В общем случае ансамбль реализаций имеет бесконечный объём. Конечное подмножество ансамбля реализаций, отражающее основные особенности СП, называется генеральным ансамблем реализаций.

Кстати, детерминированный процесс (не случайный) может рассматриваться как случайный, имеющий ансамбль реализаций объёмом 1. Таким образом, случайный процесс – это не одна функция (в классическом понимании), а, в общем случае, бесконечное множество реализаций. В этом смысле случайная функция есть некая обобщенная функция. Нельзя изобразить случайный процесс одной кривой, пусть даже очень замысловатой. Можно изобразить лишь отдельные его реализации.

Как можно описать бесконечное множество функций – реализаций случайного процесса? В основе такого описания лежит теория распределений, или теория вероятностей. Начнем с определения понятия о сечении случайного процесса.

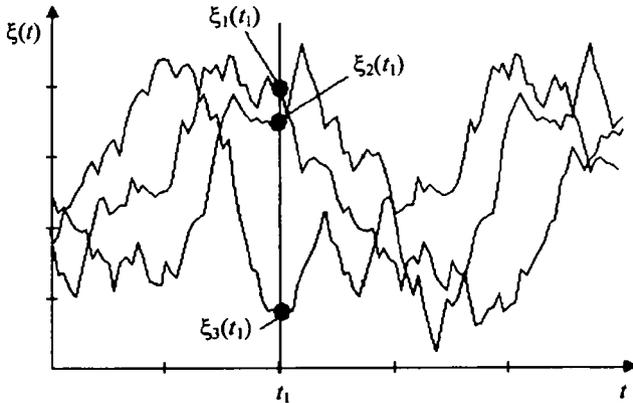


Рис. 1. Сечение и реализации случайного процесса

Сечением СП в момент времени $t = t_1$ называется множество его значений во всех реализациях $\xi(t_1) = \{\xi_k(t_1)\}$. По сути дела, это и есть однопараметрическое семейство случайных величин в разные моменты времени как определение случайного процесса, данное нами в начале этой главы. Множество всевозможных сечений случайного процесса и есть сам этот процесс.

1.2. Функция и плотность распределения

Располагая ансамблем реализаций СП $\{\xi_k(t_1)\}$ объемом N в некотором сечении процесса в момент времени t_1 , можно подсчитать, какое число из них удовлетворяет условию $\{\xi_k(t_1) \leq x_1\}$, где x_1 – некоторое заданное нами значение. Пусть таких реализаций оказалось n_1 . Назовем величину

$$F(x_1; t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_1}{N} \quad (1.1)$$

функцией распределения СП в момент времени t_1 . По своему смыслу эта функция представляет собой вероятность $P\{\xi_k(t_1) \leq x_1\}$ того, что

в выбранном сечении выполняется условие $\{\xi_k(t_1) \leq x_1\}$. Записывается это как

$$F(x_1; t_1) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ (k \leq N)}} P\{\xi_k(t_1) \leq x_1\}.$$

Очевидно, что если взять значение x_1 достаточно большим, то сформулированное условие будет выполняться для всех реализаций, так что $n_1 = N$, и тогда из (1.1) можно записать

$$F(x_1 = \infty; t_1) = 1. \quad (1.2)$$

С другой стороны, если взять значение x_1 очень маленьким, то сформулированное условие не будет никогда выполняться, т.е. $n_1 = 0$. Это означает, что

$$F(x_1 = -\infty; t_1) = 0. \quad (1.3)$$

Условия (1.2) и (1.3) называются условиями нормировки.

Введенная таким образом функция распределения $F(x_1; t_1)$ является обычной вещественной функцией, которая к тому же всегда положительная и неубывающая. Кроме того, для реальных процессов эта функция непрерывна и дифференцируема.

Введем понятие плотности распределения $f(x_1; t_1)$ как производной от функции распределения:

$$f(x_1; t_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} F(x_1; t_1). \quad (1.4)$$

Очевидно, что величина

$$f(x_1; t_1) \Delta x_1 \approx F(x_1 + \Delta x_1; t_1) - F(x_1; t_1) = P\{x_1 \leq \xi(t_1) \leq x_1 + \Delta x_1\} \quad (1.5)$$

представляет собой вероятность попадания значений процесса в малый интервал Δx_1 вблизи заданного значения x_1 . Сама же плотность распределения $f(x_1; t_1)$ имеет смысл вероятности попадания значений процесса в единичный интервал вблизи заданного значения x_1 .

Из определения (1.4) и условий нормировки (1.2) и (1.3) можно записать обратное преобразование:

$$F(x_1; t_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x; t_1) dx. \quad (1.6)$$

Сказанное иллюстрирует рис. 2. Из (1.2), (1.3) и (1.6) можно записать соотношения нормировки для плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x; t_1) dx = 1, \quad f(x_1 = \pm\infty; t_1) = 0. \quad (1.7)$$

Кроме того, из (1.5) следует, что очевидно $f(x_1; t_1) \geq 0$.

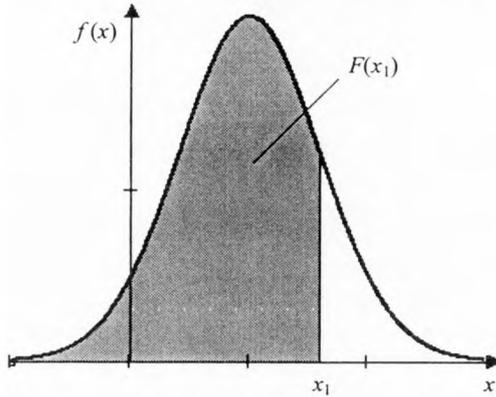


Рис. 2. Функция распределения и плотность распределения

В силу соотношения (1.6) плотность распределения и функцию распределения часто называют соответственно дифференциальной и интегральной функциями распределения. Важно заметить, что интегральная функция распределения всегда ограничена $0 \leq F(x_1; t_1) \leq 1$, что нельзя сказать о дифференциальной функции распределения $0 \leq f(x_1; t_1) \leq \infty$.

1.3. Многомерные распределения и их свойства

Если к выделенному сечению СП при $t = t_1$ добавить еще одно сечение при $t = t_2$, то можно ввести двумерную функцию распределения

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} P\{\xi_k(t_1) \leq x_1, \xi_k(t_2) \leq x_2\},$$

описывающую вероятность того, что в моменты времени t_1 и t_2 значения случайного процесса не превышают заданные значения x_1 и x_2 . Двумер-

ная плотность распределения вводится путем дифференцирования:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} F(x_1, x_2; t_1, t_2).$$

Смысл её совершенно аналогичен одномерной плотности распределения. В случае использования множества ($n \geq 1$) сечений СП можно говорить о многомерных плотности и функции распределения:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Для краткости мы будем иногда использовать векторные обозначения

$$f(\underline{x}; \underline{t}) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n),$$

где для обозначения векторов введено подчеркивание снизу:

$$\underline{x} \equiv \{x_1, x_2, \dots, x_n\}; \quad \underline{t} \equiv \{t_1, t_2, \dots, t_n\}.$$

Это избавляет от многозначности обозначений и путаницы со знаком временного усреднения. Пример двумерной плотности распределения показан на рис. 3.

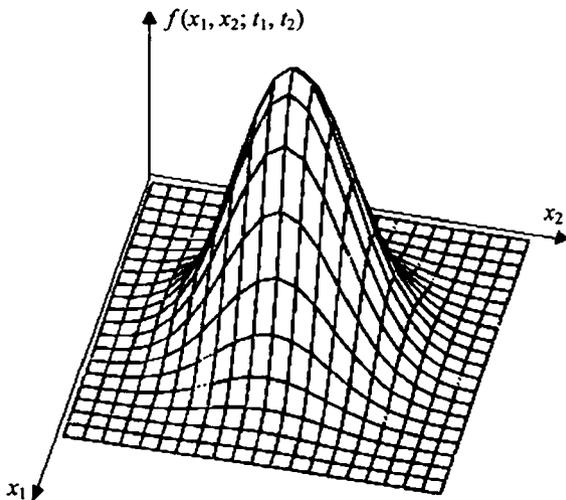


Рис. 3. Двумерная плотность распределения

Свойства плотности и функции распределения достаточно просты и очевидны:

1. Положительность: $f(\underline{x}; t) \geq 0$, $F(\underline{x}; t) \geq 0$ для любых \underline{x} , t .

2. Нормировка:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\underline{x}; t) (d^n \underline{x}) = F(\underline{x} = \infty; t) = 1, \quad f(\underline{x} = \pm \infty; t) = 0, \quad F(\underline{x} = -\infty; t) = 0.$$

3. Симметричность относительно перестановок:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_2, x_1; t_2, t_1).$$

4. Согласованность:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; t_1, t_2, \dots, t_{n-1}).$$

Следует подчеркнуть, что, увеличив число сечений до бесконечности ($n \rightarrow \infty$), мы получим наиболее полную информацию о СП. В этом смысле бесконечномерная функция и плотность распределения полностью описывают полный ансамбль его реализаций.

1.4. Статистическое усреднение и моментные функции

Пусть выбрано некоторое сечение t случайного процесса $\xi(t) = \{\xi_k(t)\}$. Среднее по ансамблю реализаций определим как

$$\langle \xi(t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \xi(t) \rangle_N, \quad \langle \xi(t) \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k(t). \quad (1.8)$$

Величина $\langle \xi(t) \rangle_N$ получается в результате простого арифметического усреднения всевозможных значений, наблюдаемых в различных реализациях случайного процесса. Число суммируемых значений может быть очень велико. Для сокращения вычислений разобьем весь диапазон возможных значений процесса на M достаточно малых одинаковых интервалов Δx . Пусть внутри некоторого такого интервала вблизи значения $x_m = x_{\min} + \Delta x \cdot m$ в сумме (1.8) попало n_m значений реализаций, для которых выполняется условие $x_m \leq \xi_k(t) \leq x_m + \Delta x$. Не совершая большой ошибки, можно провести частичное суммирование значений процесса в этом интервале и записать

$$\sum_k \xi_k(t) = n_m \cdot x_m + o(\Delta x).$$

В результате сумма (1.8) заменяется на сумму частичных сумм

$$\langle \xi(t) \rangle_N = \sum_m x_m \frac{n_m}{N}.$$

Число значений n_m имеет первый порядок малости по Δx , тогда согласно определению понятия плотности распределения можно записать

$$\frac{n_m}{N} = f(x_m; t) \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

Переходя далее к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, можно окончательно записать

$$\langle \xi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x; t) dx. \quad (1.9)$$

Таким образом, усреднение по ансамблю реализаций эквивалентно вычислению интеграла (1.9) с плотностью распределения в качестве ядра. Рис. 4 иллюстрирует усреднение по ансамблю реализаций.

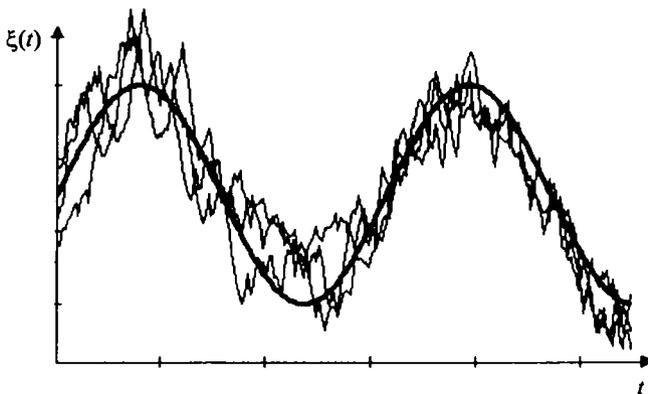


Рис. 4. К определению среднего по ансамблю реализаций

Совершенно аналогично могут быть определены величины средних по ансамблю реализаций для любых степеней случайного процесса:

$$m_n(t) \equiv \langle \xi^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x; t) dx. \quad (1.10)$$

Интеграл типа (1.10) называется начальным моментом n -го порядка для случайного процесса $\xi(t)$. Наряду с начальными моментами удобным является использование центральных моментов, которые вводятся как соответствующий момент $M_n(t) \equiv \langle \delta\xi^n(t) \rangle$ для центрированного процесса $\delta\xi(t) \equiv \xi(t) - \langle \xi(t) \rangle$. Порядок момента определяется по порядку используемой степени.

Среднее значение случайного сигнала (процесса) обычно ассоциируется с когерентной составляющей, а его флуктуационная составляющая (центрированный СП) ассоциируется с некогерентной составляющей. В общем случае сигналы имеют обе составляющие и являются частично когерентными.

При использовании двух различных сечений случайного процесса при $t = t_1$ и $t = t_2$ говорят о смешанных начальных и центральных моментах:

$$\begin{aligned} m_{n,m}(t_1, t_2) &\equiv \langle \xi^n(t_1) \xi^m(t_2) \rangle, \\ M_{n,m}(t_1, t_2) &\equiv \langle \delta\xi^n(t_1) \delta\xi^m(t_2) \rangle. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Порядок момента определяется суммой используемых степеней: $n + m$. Мерность моментов определяется числом используемых сечений.

Продолжая обобщение, можно записать среднее по ансамблю реализации для произвольной детерминированной функции $y = g(x)$ от случайного процесса $\xi(t)$:

$$\langle g(\xi(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x; t) dx.$$

Заметим, что среднее значение и дисперсия СП являются также моментами: $\langle \xi(t) \rangle = m_1$, $\sigma^2(t) = M_2(t)$. Дисперсия характеризует интенсивность флуктуаций СП. Из определения очевидно, что всегда $M_1(t) \equiv 0$.

Плотность распределения может быть определена как среднее значение от δ -функции:

$$f(x; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') f(x'; t) dx' = \langle \delta(x - \xi(t)) \rangle.$$

Учитывая, что δ -функция связана со ступенчатой функцией Хевисайда

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

известным соотношением $\chi'(x) = \delta(x)$, функцию распределения можно записать как

$$F(x; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x - x') f(x'; t) dx' = \langle \chi(x - \xi(t)) \rangle.$$

1.5. Функция корреляции и её свойства

Среди множества функций, описывающих изменение СП во времени, особого внимания заслуживает корреляционная функция (КФ), являющаяся вторым смешанным центральным моментом:

$$K(t_1, t_2) \equiv M_{1,1}(t_1, t_2) = \langle \delta\xi(t_1) \delta\xi(t_2) \rangle = m_{1,1}(t_1, t_2) - m_1(t_1) m_1(t_2).$$

С корреляционной функцией связаны коэффициент корреляции $R(t_1, t_2)$ и интегральный масштаб корреляции τ_0 , которые определяются как

$$R(t_1, t_2) \equiv \frac{K(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}, \quad \tau_0(t_1) = \int_0^{\infty} R(t_1, t_2) dt_2.$$

Перечислим основные свойства КФ:

1. Равенство нулю для статистически независимых значений случайного процесса. Это следует из того, что согласно (1.11) $m_{1,1}(t_1, t_2) = m_1(t_1)m_1(t_2)$. Часто КФ используют как меру взаимосвязи процесса в различные моменты времени. Однако в общем случае из некоррелированности не следует статистическая независимость. Как будет показано позднее, КФ является мерой линейной зависимости СП. Некоррелированность эквивалентна независимости СП только для так называемых нормальных процессов, которые будут рассмотрены во второй главе.

2. Симметричность КФ. Это свойство следует из определения

$$K(t_1, t_2) = K(t_2, t_1).$$

3. Ограниченность КФ: $|R(t_1, t_2)| \leq 1$ (рис. 5). Для доказательства достаточно рассмотреть следующую заведомо положительную величину:

$$\frac{1}{2} \left\langle \left[\frac{\delta\xi(t_1)}{\sigma(t_1)} \pm \frac{\delta\xi(t_2)}{\sigma(t_2)} \right]^2 \right\rangle = 1 \pm R(t_1, t_2) \geq 0.$$

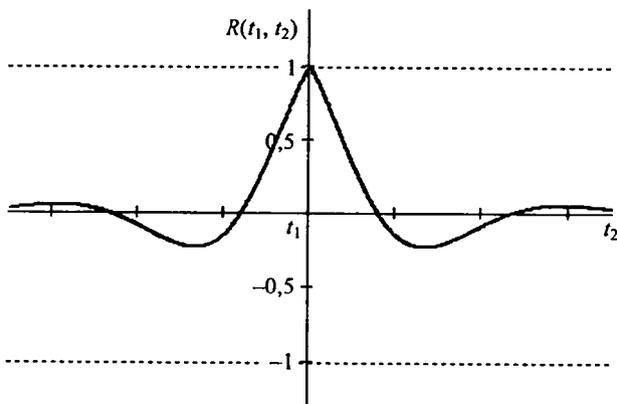


Рис. 5. Свойство ограниченности корреляционной функции

4. Положительная определенность. Для КФ она заключается в том, что для любой детерминированной вещественной функции $g(t)$ имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1)g(t_2)K(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \geq 0.$$

Это неравенство является прямым следствием усреднения следующей заведомо положительной величины:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \left[\int_{-T}^T g(t) \delta \xi(t) dt \right]^2 \right\rangle \geq 0.$$

1.6. Характеристическая функция и её свойства

Характеристической функцией (ХФ) называют комплекснозначную функцию вещественных аргументов $\varphi(u; t)$, определяемую как результат усреднения:

$$\varphi(u; t) = \langle \exp(iu \xi(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) f(x; t) dx. \quad (1.12)$$

Как видно из (1.12), по своей форме ХФ есть преобразование Фурье от плотности распределения $f(x; t)$. Существование (1.12) предполагает

существование обратного преобразования

$$f(x; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iux) \varphi(u; t) du.$$

Подобно (1.12) может быть определена многомерная ХФ:

$$\varphi(\underline{u}; t) = \langle \exp(i\underline{u}\underline{\xi}) \rangle.$$

Однозначная связь ХФ и плотности распределения означает, что ХФ даёт полное описание СП так же, как и функция распределения.

Перечислим основные свойства ХФ.

1. Нормировка: $\varphi(u = 0; t) = 1$.

2. Ограниченность: $|\varphi(u; t)| \leq 1$. Следует из неравенства

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) f(x; t) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x; t) dx = 1.$$

3. Эрмитовость: $\varphi^*(\underline{u}; t) = \varphi(-\underline{u}; t)$, где значок «*» означает операцию комплексного сопряжения.

4. Согласованность: $\varphi(u_1, u_2 = 0; t_1, t_2) = \varphi(u_1, t_1)$.

5. Факторизация для независимых значений СП:

$$\varphi(\underline{u}; t) = \prod_j \varphi(u_j; t_j).$$

Свойства 1, 3–5 следуют непосредственно из определения ХФ (1.12).

1.7. Разложение характеристической функции по моментам

Воспользуемся в представлении (1.12) известным разложением для экспоненциальной функции

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

В результате, меняя порядок суммирования и усреднения, получаем для ХФ разложение по моментам:

$$\varphi(u; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle [iu\xi(t)]^n \rangle}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[iu]^n}{n!} m_n(t).$$

Это означает, что моменты могут вычисляться через ХФ:

$$m_n(t) = \left. \frac{\partial^n}{i^n \partial u^n} \right|_{u=0} \varphi(u; t).$$

Подобно приведенному выше можно представить разложение по моментам в многомерном случае как

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{u}; t) &= \langle \exp\{i(u_1 \xi(t_1) + u_2 \xi(t_2) + \dots + u_m \xi(t_m))\} \rangle = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^m \frac{\langle \xi(t_k) \rangle}{1!} i u_k + \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^m \frac{\langle \xi(t_k) \xi(t_p) \rangle}{2!} i u_k i u_p + \dots \end{aligned}$$

При этом можно записать, что

$$\langle \xi(t_1) \xi(t_2) \dots \xi(t_m) \rangle = \left. \frac{1}{i^m} \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial u_2} \dots \frac{\partial}{\partial u_m} \right|_{\underline{u}=0} \varphi(\underline{u}; t). \quad (1.13)$$

1.8. Кумулянтное разложение

Кумулянтным разложением называется разложение в ряд Тейлора вида

$$\ln[\varphi(u; t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[iu]^n}{n!} \kappa_n(t),$$

или

$$\varphi(u; t) = \exp \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[iu]^n}{n!} \kappa_n(t) \right\}. \quad (1.14)$$

Сами коэффициенты разложения

$$\kappa_n(t) = \left. \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n}{\partial u^n} \right|_{u=0} \ln[\varphi(u; t)]$$

называются кумулянтами n -го порядка.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \kappa_0(t) &= 0, \quad \kappa_1(t) = m_1(t) = \langle \xi(t) \rangle, \quad \kappa_2(t) = M_2(t) = \sigma^2(t), \\ \kappa_3(t) &= M_3(t), \quad \kappa_4(t) = M_4(t) - 3M_2^2(t). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Таким образом, кумулянтное разложение начинается с первого члена, а не с нулевого.

Подобно разложению по моментам существует многомерное кумулянтное разложение.

1.9. Стационарность случайного процесса

Понятие стационарности случайного процесса означает независимости характеристик случайного процесса от выбора начала отсчета времени. Для плотности распределения СП это равнозначно выполнению равенства

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau) \end{aligned} \quad (1.16)$$

для любых значений $\tau \in (-\infty, \infty)$. Если это справедливо для произвольного количества сечений ($n = 1, 2, \dots$), то говорят о строгой стационарности случайного процесса. На практике часто достаточно ограничиться требованием выполнения соотношения (1.16) только для любых двух сечений ($n = 1, 2$). В этом случае говорят о стационарности в широком смысле.

Все строго стационарные процессы – стационарны и в широком смысле, но не все процессы, стационарные в широком смысле, – строго стационарны. Последнее выполняется только для нормальных случайных процессов. Это следует из п. 2.1.3 (см. гл. 2).

Перечислим свойства стационарных СП, вытекающие непосредственно из определения (20):

1. Характеристики стационарного СП зависят только от интервалов между временными сечениями: $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$, ..., $\tau_{n-1} = t_n - t_{n-1}$. Этим интервалам на один меньше, чем число рассматриваемых сечений СП. Для доказательства достаточно в (20) положить $\tau = -t_1$ и тогда

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 - t_1, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_1) = \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_n; 0, \tau_1, \tau_1 + \tau_2, \dots, \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n-1}). \end{aligned}$$

Для стационарного в широком смысле СП имеет место зависимость только разности времен $\tau = \tau_1 = t_2 - t_1$. Например,

$$K(t_1, t_2) = K(t_2 - t_1) = K(\tau).$$

2. Одномерные характеристики СП вообще не зависят от времени:

$$\langle \xi(t) \rangle = \text{const}, \quad \sigma^2(t) = \text{const}, \quad \tau_0 = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau = \text{const}.$$

3. Корреляционная функция является четной:

$$K(\tau) = K(-\tau).$$

Это следует из свойства симметричности КФ.

4. Максимальное значение КФ имеет при нулевом разnose:

$$K(\tau = 0) = \sigma^2.$$

1.10. Энергетический спектр. Теорема Винера – Хинчина

В радиофизике важное место занимает понятие спектра сигнала как его преобразования Фурье. Представляется важным обобщение этого понятия для случайных процессов. Случайные процессы – это не одна функция, а целый ансамбль реализаций-функций. Условие Римана (абсолютная интегрируемость на бесконечном интервале) для существования интегралов Фурье для каждой из реализаций не обязательно выполняется. Для стационарных СП это условие скорее не выполняется, чем выполняется. Выход из возникающего затруднения дает использование вместо строгого преобразования Фурье другого интегрального выражения, назовем его текущим спектром СП:

$$\xi_T(\omega) = \int_{-T}^T \xi(t) \exp\{i\omega t\} dt. \quad (1.17)$$

Получившийся процесс есть результат интегрирования каждой из реализаций исходного СП. Текущие спектры существуют для любых физически реализуемых процессов. Величину T можно устремлять к бесконечности лишь после усреднения.

Вычислим первые два момента для текущего спектра СП в предположении стационарности и центрированности исходного процесса. Прежде всего, из определения (1.17) следует центрированность и текущего спектра:

$$\langle \xi_T(\omega) \rangle = \int_{-T}^T \langle \xi(t) \rangle \exp\{i\omega t\} dt = 0.$$

Тогда для корреляционной функции текущего спектра можно записать

$$K_T(\omega_1, \omega_2) \equiv \langle \xi_T(\omega_1) \xi_T^*(\omega_2) \rangle = \int_{-T}^T \int_{-T}^T K(t_2 - t_1) \exp\{i\omega_1 t_1 - i\omega_2 t_2\} dt_1 dt_2. \quad (1.18)$$

Представим чисто формально корреляционную функцию исходного СП через её спектр:

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \exp\{-i\omega\tau\} d\omega, \\ W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \exp\{i\omega\tau\} d\tau. \quad (1.19)$$

Существование спектра $W(\omega)$ обеспечивается требованием выполнения для КФ условия Римана.

После подстановки (1.19) в (1.18) и введения обозначения

$$\delta_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \exp\{i\omega t\} dt = \frac{\sin(\omega T)}{\pi\omega} \quad (1.20)$$

можно записать

$$K_T(\omega_1, \omega_2) \equiv 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \delta_T(\omega_1 - \omega) \delta_T(\omega_2 - \omega) d\omega.$$

Поскольку $\lim_{T \rightarrow \infty} \delta_T(\omega) = \delta(\omega)$ — обычная δ -функция, то

$$K_T(\omega_1, \omega_2) \approx 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \delta_T(\omega_1 - \omega) d\omega \delta_T(\omega_1 - \omega_2) \quad (1.21)$$

и далее $\lim_{T \rightarrow \infty} K_T(\omega_1, \omega_2) = 2\pi W(\omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2)$.

Таким образом, текущие спектры для стационарных процессов δ -коррелированы.

Как видно из последнего соотношения, дисперсия текущего спектра для безграничного интервала интегрирования неограниченно велика. Вычислим дисперсию текущего спектра для единичного интервала. Для

этого проведем нормировку корреляции (1.21) на величину интервала интегрирования:

$$\frac{K_T(\omega_1, \omega_2)}{2T} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \delta_T(\omega_1 - \omega) d\omega \frac{\delta_T(\omega_1 - \omega_2)}{2T}.$$

При совмещении частот $\omega_1 = \omega_2$ и, имея в виду, что

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow \omega_2} \frac{\delta_T(\omega_1 - \omega_2)}{2T} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega_1 \rightarrow \omega_2} \frac{\sin((\omega_1 - \omega_2)T)}{(\omega_1 - \omega_2)T} = \frac{1}{2\pi},$$

для дисперсии текущего спектра, приведенной к единичному интервалу, получим

$$\frac{K_T(\omega_1, \omega_1)}{2T} = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \delta_T(\omega_1 - \omega) d\omega.$$

Переходя теперь к пределу при $T \rightarrow \infty$, имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{K_T(\omega_1, \omega_1)}{2T} \right\} = W(\omega_1). \quad (1.22)$$

Введенная так величина характеризует интенсивность флуктуаций, приходящуюся на единичный частотный интервал вблизи заданной частоты и имеет смысл энергетического спектра флуктуаций. Это становится ясно, если из (1.19) записать выражение для полной интенсивности флуктуаций:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} W(2\pi f) df. \quad (1.23)$$

Фактически мы выяснили физический смысл введенной ранее формально функции $W(\omega)$ – это энергетический спектр (ЭС) флуктуаций СП. В этом свете соотношения (1.19) представляют собой запись теоремы Винера – Хинчина: «Энергетический спектр и корреляционная функция СП связаны преобразованием Фурье».

Заметим, что на практике ЭС может вычисляться двумя способами: либо через найденную предварительно КФ, либо непосредственно по (1.22). Для сопоставления поведения различных процессов вводится понятие интегральной ширины энергетического спектра (рис. 6):

$$\Omega_0 = \frac{1}{\max W(\omega)_0} \int_0^{\infty} W(\omega) d\omega. \quad (1.24)$$

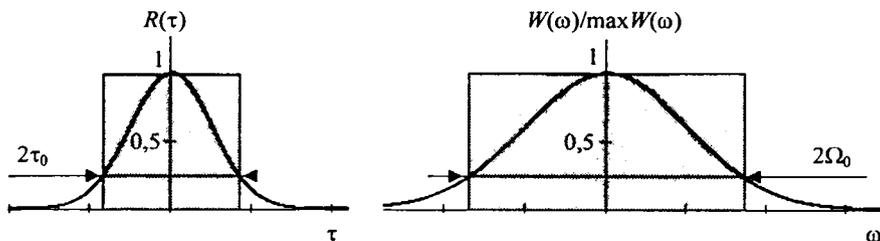


Рис. 6. К определению интегрального масштаба корреляции и ширины энергетического спектра

Перечислим основные свойства ЭС:

1. Положительность: $W(\omega) \geq 0$.
2. Четность: $W(-\omega) = W(\omega)$.
3. Интегральная ширина ЭС обратно пропорциональна интегральному масштабу корреляции и удовлетворяет соотношению неопределенности:

$$\Omega_0 \tau_0 = \frac{\pi}{2} \frac{W(0)}{\max W(\omega)}. \quad (1.25)$$

4. Для того чтобы стационарный процесс существовал, необходимо, чтобы его энергетический спектр при $\omega \rightarrow \infty$ убывал быстрее, чем $1/\omega$. Следует это из требования конечности дисперсии процесса и условия сходимости несобственного интеграла (1.23).

Среди стационарных СП выделяют так называемый белый шум как процесс, у которого энергетический спектр постоянен во всем диапазоне частот: $W(\omega) = W_0 = \text{const}$. Здесь термин «белый шум» ассоциируется с термином «белый свет». Очевидно, что соответствующая ему корреляционная функция имеет вид $K(\tau) = W_0 \delta(\tau)$. Дисперсия этого процесса бесконечно велика, а значит, такой процесс не может физически существовать. Процессов с бесконечной интенсивностью флуктуаций в природе не существует. Белый шум является не более чем удобной математической идеализацией СП, у которого интегральный масштаб корреляции равен нулю, а интегральная ширина энергетического спектра бесконечно велика. Обычно считается, что белый шум является центрированным и нормальным СП. Говорят, что процесс, энергетический спектр которого непостоянен во всем частотном диапазоне, является окрашенным СП.

1.11. Эргодические случайные процессы

Усреднение по ансамблю реализаций предполагает наличие генерального ансамбля реализаций случайного процесса. Тогда усреднение можно проводить либо непосредственно по реализациям, либо предварительно оценив его плотность распределения. На практике часто приходится довольствоваться временным усреднением внутри реализации. Определим временное среднее как интеграл

$$\bar{\xi}_T(t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t+t') dt'.$$

Можно говорить о многомерных временных средних, например о временной корреляционной функции

$$K_T(t, \tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \delta\xi(t+t') \delta\xi(t+t'+\tau) dt'.$$

Если иметь в виду, что интегрирование здесь проводится внутри каждой реализации, то в общем случае возникающий процесс также является случайным. Однако интуитивно понятно, что временное среднее при большом времени усреднения должно стремиться к среднему по ансамблю реализаций. Математики говорят, что процесс является эргодическим, если среднее по времени при достаточно большом интервале усреднения с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, стремится к средней по ансамблю реализаций. Записывается это условие как

$$P \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\xi}_T(t) = \langle \xi(t) \rangle \right\} = 1.$$

Возникает вопрос: какие СП могут быть эргодическими? Без доказательства отметим, что для этого существуют два условия: стационарность и неразложимость процесса на более простые СП. Первое условие достаточно очевидно, поясним второе на примере. Разложимым СП является процесс вида

$$\zeta(t) = \alpha \cdot \xi(t) + (1 - \alpha) \cdot \eta(t),$$

где $\xi(t)$, $\eta(t)$ – разные стационарные процессы. Параметр α – случайная величина, для которой $P\{\alpha = 1\} = p_0$ и $P\{\alpha = 0\} = 1 - p_0$, причем обязательно $p_0 \neq 0$ и $p_0 \neq 1$.

Подобно тому, как это имеет место для понятия стационарности, можно говорить о строгой эргодичности СП, если условие эргодичности выполняется для сколь угодно высокой мерности моментов. Эргодичность в широком смысле предполагает выполнение этого условия только для среднего и корреляционной функции.

1.12. Дисперсия временного среднего. Выбор времени усреднения

Выполнение операции временного усреднения предполагает прежде всего выбор времени усреднения, поскольку как нельзя реализовать наблюдение бесконечного ансамбля реализаций, так и нельзя реализовать бесконечное время наблюдения. Для практики обычно достаточно потребовать, чтобы дисперсия флуктуаций временного среднего была много меньше дисперсии исходного СП. Найдем необходимое для этого условие.

Сначала оценим среднее по ансамблю реализаций от временного среднего:

$$\langle \bar{\xi}_T(t) \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \langle \xi(t+t') \rangle dt' = \langle \xi \rangle.$$

С учетом этого для дисперсии временного среднего можно записать

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{\xi}}^2 &= \left(\frac{1}{2T} \right)^2 \int_{-T}^T \int_{-T}^T \langle \delta \xi(t+t') \delta \xi(t+t'') \rangle dt' dt'' = \\ &= \left(\frac{1}{2T} \right)^2 \int_{-T}^T \int_{-T}^T K(t'' - t') dt' dt''. \end{aligned}$$

Подобный интеграл нами уже рассматривался при анализе текущих спектров для стационарных процессов. Поэтому согласно (1.18) и (1.22) преобразуем предыдущее выражение как

$$\sigma_{\bar{\xi}}^2 = \left(\frac{1}{2T} \right)^2 \langle \delta \xi_T(\omega=0) \delta \xi_T^*(\omega=0) \rangle = \frac{W(\omega=0)}{2T}.$$

Используя далее определение интегрального масштаба корреляции (см. рис. 6)

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau = \frac{W(\omega=0)}{2\sigma^2},$$

для оценки дисперсии временного среднего окончательно имеем

$$\sigma_{\bar{\xi}}^2 \approx \sigma^2 \frac{\tau_0}{T}.$$

Требование малости дисперсии временного среднего $\sigma_{\bar{\xi}}^2 \ll \sigma^2$ неизбежным образом приводит к необходимости выбора такого времени усреднения, чтобы выполнялось условие $T \gg \tau_0$. Таким образом время усреднения должно во много раз превышать масштаб корреляции.

1.13. Контрольные вопросы

- Что такое ансамбль реализаций случайного процесса?
- Чем отличаются функция и плотность распределения случайного процесса?
- Что такое центрирование случайного процесса?
- Сформулировать свойство ограниченности корреляционной функции случайного процесса.
- Какова связь характеристической функции и плотности распределения случайного процесса?
- Каково место корреляционной функции в кумулянтном разложении?
- Сформулировать понятие и условие стационарности случайного процесса.
- Сформулировать теорему Винера – Хинчина для энергетического спектра.
- Как соотносятся интегральный масштаб корреляции и интегральная ширина энергетического спектра случайного процесса?
- В чем состоит реальность и нереальность «белого шума»?
- Как выбрать интервал усреднения для эргодических случайных процессов?

Глава 2

МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Несмотря на кажущуюся непредсказуемость случайных процессов, как мы видели в предыдущих разделах, для их описания существует математический аппарат – теория СП. Случайные процессы в радиофизике, обычно их называют шумами, имеют свои специфические особенности. В этой главе мы рассмотрим модели наиболее распространенных из них.

2.1. Нормальные процессы

Самый распространенный и самый универсальный тип шумов, которые нас окружают – это нормальные шумы. В случае, если шумы все-таки не нормальные, то прохождение их через радиоэлектронные системы часто приводит к их нормализации. Поэтому начнем рассмотрение с нормальных случайных процессов.

2.1.1. Характеристическая функция и плотность распределения

Определим нормальный СП как такой процесс, в кумулянтном разложении которого содержатся только два первых члена:

$$\varphi(u; t) = \exp \left\{ iu \kappa_1(t) - \frac{1}{2} u^2 \kappa_2(t) \right\}.$$

Это означает, что согласно (1.15) нормальный СП имеет ХФ вида

$$\varphi(u; t) = \exp \left\{ iu \langle \xi(t) \rangle - \frac{1}{2} u^2 \sigma^2(t) \right\}. \quad (2.1)$$

Найдем вид соответствующей плотности распределения, воспользовавшись её связью ХФ (1.12):

$$f(x; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ iu [\langle \xi(t) \rangle - x] - \frac{1}{2} u^2 \sigma^2(t) \right\} du.$$

Вычисляется этот интеграл путем использования замены переменной интегрирования

$$v = u\sigma + i \frac{x - \langle \xi(t) \rangle}{\sigma},$$

так что
$$f(x; t) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left\{-\frac{[x - \langle \xi(t) \rangle]^2}{2\sigma^2(t)}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\} dv.$$

Используя далее интеграл Пуассона, окончательно имеем

$$f(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{[x - \langle \xi(t) \rangle]^2}{2\sigma^2(t)}\right\}.$$

В последующих разделах будет показано, что в радиофизических системах многие случайные процессы имеют тенденцию приближаться к нормальному СП. Степень близости реального процесса к нормальному обычно характеризуют близостью к нулю нормированных кумулянтов третьего и четвертого порядков

$$\gamma_1(t) = \frac{\kappa_3}{\sigma^3} = \frac{M_3}{\sigma^3}, \quad \gamma_2(t) = \frac{\kappa_4}{\sigma^4} = \frac{M_4}{\sigma^4} - 3,$$

называемых соответственно коэффициентом асимметрии и коэффициентом эксцесса

Сделаем два замечания:

1. При $\sigma \rightarrow 0$ нормальный закон распределения переходит в $f(x; t) = \delta(x - \langle \xi(t) \rangle)$ и описывает детерминированный процесс.

2. Не существует СП, для которого кумулянтное разложение содержало бы другое конечное число членов, большее двух. Показано, что при этом нарушаются основные свойства для плотности распределения.

Без вывода приведем выражения для многомерных плотности распределения и характеристической функции нормального СП:

$$f(\underline{x}; t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \underline{\underline{K}}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[\underline{x} - \langle \underline{\xi} \rangle]^T \underline{\underline{K}}^{-1} [\underline{x} - \langle \underline{\xi} \rangle]\right\}; \quad (2.2)$$

$$\varphi(\underline{u}; t) = \exp\left\{i\underline{u} \langle \underline{\xi} \rangle - \frac{1}{2}\underline{u}^T \underline{\underline{K}} \underline{u}\right\}. \quad (2.3)$$

Здесь $\underline{\underline{K}}$ – корреляционная матрица, составленная из всевозможных корреляционных функций: $K_{n,m} = \langle \delta\xi(t_n) \delta\xi(t_m) \rangle$, $n, m \in 1, 2, \dots, N$.

2.1.2. Центральная предельная теорема

В теории нормальных случайных процессов главное место занимает центральная предельная теорема: «Сумма большого числа независимых, почти равнозначных процессов является нормальным процессом». Приведем её доказательство.

Пусть мы имеем M различных СП: $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_M(t)$. Будем считать для простоты, что все эти процессы центрированы. Обобщение на случай нецентрированных процессов элементарно. Рассмотрим СП, который получается от суммирования всех исходных процессов:

$$\eta(t) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^M \xi_m(t).$$

Нормировка применена для сохранения конечности дисперсии при увеличении числа M . Покажем, что этот процесс становится нормальным при $M \rightarrow \infty$.

Запишем характеристическую функцию для СП $\eta(t)$:

$$\varphi(u; t) = \left\langle \exp \left\{ iu \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^M \xi_m(t) \right\} \right\rangle.$$

С учетом независимости исходных процессов можно записать

$$\varphi(u; t) = \prod_{m=1}^M \left\langle \exp \left\{ iu \frac{1}{\sqrt{M}} \xi_m(t) \right\} \right\rangle = \prod_{m=1}^M \varphi_m \left(\frac{u}{\sqrt{M}}; t \right).$$

Характеристические функции составляющих процессов представляются своими, вообще говоря, бесконечными кумулятивными разложениями:

$$\varphi_m(u; t) = \left\langle \exp \{ iu \xi_m(t) \} \right\rangle = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iu)^k}{k!} \kappa_k^{(m)} \right\}.$$

Поскольку все составляющие процессы центрированы, то $\kappa_1^{(m)} \equiv 0$.

Тогда для суммарного процесса имеем

$$\varphi(u; t) = \exp \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(iu / \sqrt{M})^k}{k!} \sum_{m=1}^M \kappa_k^{(m)} \right\}.$$

Обозначим $\bar{\kappa}_k \equiv \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \kappa_k^{(m)}$. В силу приблизительной равнозначности исходных процессов эта величина не зависит от M , по крайней мере, при больших значениях M . В результате можно записать

$$\varphi(u; t) = \exp \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(iu)^k}{k!} \bar{\kappa}_k M^{1-\frac{k}{2}} \right\}.$$

Устремляя теперь $M \rightarrow \infty$, окончательно получаем

$$\varphi(u; t) = \exp \left\{ -\frac{u^2}{2} \bar{\kappa}_2 \right\}.$$

Это и соответствует данному нами определению (2.1) нормального процесса с нулевым средним. Теорема доказана.

В многомерном случае доказательство аналогично. Важно подчеркнуть, что многомерность может быть обеспечена как множеством независимых различных процессов, взятых в один момент времени, так и множеством сечений одного СП, взятых на интервалах, превышающих время корреляции.

Доказанная теорема объясняет причину нормализации всех временных средних при правильно выбранном времени усреднения: временное среднее просто представляется суммой большого числа независимых и приблизительно равнозначных слагаемых так, что выполняются условия теоремы.

2.1.3. Свойства нормального случайного процесса

Рассмотрим основные свойства нормальных случайных процессов. Все они доказываются, исходя из характеристической функции (2.3).

1. Некоррелированные СП – статистически независимы. Действительно, если процессы некоррелированные, то соответствующая матрица корреляции является диагональной:

$$K_{n,m} = \langle \delta \xi(t_n) \delta \xi(t_m) \rangle = \sigma_n^2(t_n) \cdot \delta_{n,m},$$

$$n, m \in 1, 2, \dots, N,$$

где $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера. В результате характеристическая функция факторизуется:

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{u}; t) &= \exp \left\{ i \underline{u} \langle \underline{\xi} \rangle - \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{K} \underline{u} \right\} = \\ &= \prod_{n=1}^N \varphi_n(u_n; t_n), \quad \varphi_n(u_n; t_n) = \exp \left\{ i u_n \langle \xi_n \rangle - \frac{1}{2} u_n^2 \sigma_n^2(t_n) \right\}. \end{aligned}$$

Это и означает независимость.

2. Все статистические моменты выражаются через первые два момента.

Доказательство этого следует из вида ХФ (2.3), поскольку в эту формулу не входят другие моменты, кроме первых двух.

В качестве примера можно непосредственно по (1.13) вычислить несколько первых моментов. Так, полагая, что СП – центрированный, получаем

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{u}; t) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_k \sum_p u_k K_{k,p} u_p \right\}, \\ \langle \xi_1 \rangle &= i \sum_p K_{1,p} u_p \cdot \varphi(\underline{u}; t) \Big|_{\underline{u}=0} = 0, \\ \langle \xi_1 \xi_2 \rangle &= \left[K_{1,2} - \sum_k \sum_p u_k K_{1,k} u_p K_{2,p} \right] \cdot \varphi(\underline{u}; t) \Big|_{\underline{u}=0} = K_{1,2}, \\ \langle \xi_1 \xi_2 \xi_3 \rangle &= \left\{ \frac{1}{i} \left[-K_{1,3} \sum_p u_p K_{2,p} - K_{2,3} \sum_k u_k K_{1,k} \right] + \right. \\ &+ \left. \left[K_{1,2} - \sum_k \sum_p u_k K_{1,k} u_p K_{2,p} \right] \sum_p K_{3,p} u_p \right\} \cdot \varphi(\underline{u}; t) \Big|_{\underline{u}=0} = 0, \\ \langle \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \rangle &= K_{1,3} K_{2,4} + K_{2,3} K_{1,4} + K_{1,2} K_{3,4}. \end{aligned}$$

Все нечетные моменты центрированного нормального СП оказываются равны нулю.

Следствием этого свойства является вывод, что корреляционная теория дает полное описание нормальных СП.

3. Сумма нормальных СП – нормальный процесс.

Это свойство почти очевидно, а доказательство несколько громоздко, и здесь не приводится.

В качестве примера рассмотрим процесс, получающийся как разность нормальных СП: $\eta = \xi_1 - \xi_2$. Очевидно, закон его распределения – нормальный, а его параметры определяются как

$$\langle \eta \rangle = \langle \xi_1 \rangle - \langle \xi_2 \rangle, \sigma_\eta^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2K_{1,2}.$$

Обобщением этого свойства является утверждение, что любая линейная комбинация нормальных СП есть нормальный СП.

2.1.4. Условная плотность нормального распределения. Предсказание случайных процессов

Знание поведения одного процесса может быть использовано для предсказания поведения другого, если между ними существует некоторая статистическая взаимосвязь. В качестве второго процесса может выступать исходный, взятый с некоторым временным сдвигом. В этом случае речь может идти о прогнозе поведения СП в будущее на основе измерений сейчас. Для описания этого используется условная плотность распределения.

Условная плотность нормального распределения значений одного процесса при условии, что значения другого процесса измерены, определяется как результат деления двумерной плотности распределения на одномерную:

$$f(x_2 | x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1)}.$$

Здесь и дальше, если временной параметр не меняется, мы будем для краткости его опускать в формулах. Для записи в явном виде двумерной плотности распределения согласно (2.2) необходимо задать соответствующую корреляционную матрицу

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 R \\ \sigma_1 \sigma_2 R & \sigma_2^2 \end{bmatrix},$$

где R – коэффициент корреляции первого и второго процессов. Определитель этой матрицы и соответствующая обратная матрица находятся как

$$\det \underline{\underline{K}} = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - R^2), \quad \underline{\underline{K}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{K}}} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_1 \sigma_2 R \\ -\sigma_1 \sigma_2 R & \sigma_1^2 \end{bmatrix}.$$

Запишем в явном виде двумерную плотность распределения

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \underline{\underline{K}}}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{(x_1 - \langle \xi_1 \rangle)^2 \sigma_2^2 - 2(x_1 - \langle \xi_1 \rangle)(x_2 - \langle \xi_2 \rangle)\sigma_1\sigma_2 R + (x_2 - \langle \xi_2 \rangle)^2 \sigma_1^2}{2 \det \underline{\underline{K}}} \right\}.$$

Для одномерной плотности распределения формула существенно проще:

$$f(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left\{ -\frac{(x_1 - \langle \xi_1 \rangle)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

В результате деления и приведения подобных членов окончательно для условной плотности распределения получаем, что

$$f(x_2 | x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{2|1}} \exp \left\{ -\frac{(x_2 - \langle \xi_{2|1} \rangle)^2}{2\sigma_{2|1}^2} \right\}, \quad (2.4)$$

где введены обозначения

$$\langle \xi_{2|1} \rangle = \langle \xi_2 \rangle + R \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - \langle \xi_1 \rangle), \quad \sigma_{2|1}^2 = \sigma_2^2 (1 - R^2). \quad (2.5)$$

Таким образом, условная плотность распределения представляет собой нормальный закон, параметры которого задаются соотношениями (2.5).

Согласно полученному результату, второй случайный процесс не перестал быть случайным оттого, что первый процесс был измерен. Он остался нормальным, но его характеристики, если $R \neq 0$, корректируются с учетом имеющихся априорных сведений. Согласно (2.5), среднее значение ожидаемой величины смещается, а дисперсия уменьшается.

В предельном случае при полной взаимосвязи процессов $R = 1$ и величина $\sigma_{2|1}^2 = 0$, а закон распределения – δ -функция. Это означает, что после измерения первого процесса второй процесс становится детерминированным, т.е. полностью определенным, а при выполнении условия $\sigma_2 = \sigma_1$ – просто равным измеренному значению первого процесса $\langle \xi_{2|1} \rangle = x_1$. При $R \neq 1$ имеет место размытие строгого детерминизма. Коэффициент корреляции играет роль некоторого параметра этого детерминизма.

Дадим полученному результату некоторое образное представление. Пусть в результате многочисленных наблюдений первого и второго процесса имеется ансамбль их реализаций. Представим синхронные отсчеты процессов как абсциссу и ординату точки в прямоугольной системе координат. Множество реализаций даст на плоскости некоторое «облако» этих точек (рис.7).

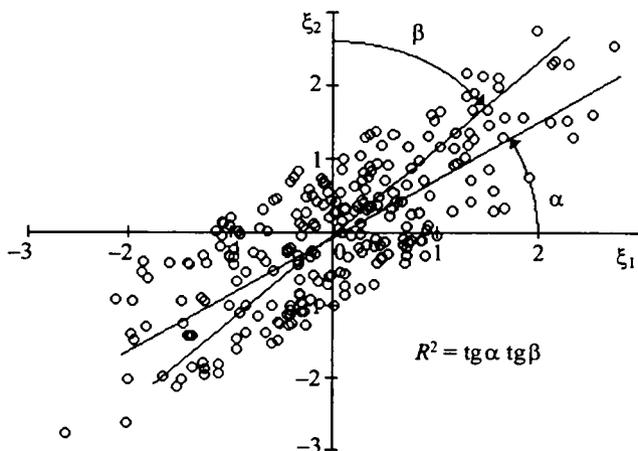


Рис. 7. Диаграмма рассеяния и геометрический смысл коэффициента корреляции

Такое представление данных часто называется диаграммой рассеяния. Расплывчатость полученного «облака» точек (диаграммы рассеяния) свидетельствует о стохастичности процессов. Если «облако» сжалось до прямой линии, то имеет место полная взаимосвязь процессов и $R = 1$. Тангенс угла наклона этой прямой согласно (2.5) определяется как

$$\text{tg}(\alpha) = R \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (2.6)$$

Если диаграмма рассеяния расплывается, то $R \neq 1$. Аппроксимация её средней прямой линией приводит к зависимости вида (2.5) с тангенсом угла наклона (2.6). На основе этого можно утверждать, что коэффициент корреляции, а значит, и функция корреляции являются мерой линейной взаимосвязи СП (!).

Если теперь мысленно сменить первый и второй процессы местами, то все сказанное выше сохранит силу, но угол наклона диаграммы рассеяния станет другой:

$$\operatorname{tg}(\beta) = R \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \quad (2.7)$$

Это означает, что, перемножив (2.6) и (2.7), мы можем записать

$$\operatorname{tg}(\alpha) \operatorname{tg}(\beta) = R^2,$$

или

$$R = \pm \sqrt{\operatorname{tg}(\alpha) \operatorname{tg}(\beta)}. \quad (2.8)$$

В частном случае, когда мы имеем дело с полным детерминизмом, очевидно, $\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{ctg}(\beta)$ и $R = \pm 1$. Формула (2.8) дает простой способ для графической оценки коэффициента корреляции по диаграмме рассеяния. Знак «+» выбирается при положительном наклоне прямой и «-» при отрицательном.

2.2. Марковские случайные процессы

Рассмотренные выше нормальные случайные процессы полностью описываются первыми двумя моментами. Подобными свойствами в смысле мерности описания, но только плотностями распределения, а не моментами, обладают также марковские СП (МСП). Образно говорят, что марковские процессы это – процессы со слабой памятью. Но это достаточно общее свойство всех СП.

2.2.1. Уравнение Смолуховского

Для введения представления о марковских процессах рассмотрим множество сечений случайного процесса

$$\xi_1 = \xi(t_1), \quad \xi_2 = \xi(t_2), \quad \xi_3 = \xi(t_3), \quad \dots, \quad \xi_n = \xi(t_n),$$

взятых в последовательные моменты времени

$$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_n.$$

Согласно правилу умножения вероятностей, можно записать

$$\begin{aligned} & f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ & = f(\xi_n; t_n | \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}; t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}; t_1, t_2, \dots, t_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Если СП таков, что его текущее значение слабо зависит от предшествующих значений процесса, то можно предположить выполнение равенства

$$f(\xi_n; t_n | \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}; t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = f(\xi_n; t_n | \xi_{n-1}; t_{n-1}). \quad (2.10)$$

СП, для которого равенство (2.10) выполняется при любых n , называется марковским случайным процессом (МСП). В соответствии с этим определением, применяя (2.9) к (2.10) многократно, имеем

$$\begin{aligned} & f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ & = f(\xi_n; t_n | \xi_{n-1}; t_{n-1}) f(\xi_{n-1}; t_{n-1} | \xi_{n-2}; t_{n-2}) \cdots f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) f(\xi_1; t_1). \end{aligned}$$

Видно, что марковские процессы полностью определяются одномерной плотностью распределения $f(\xi_1; t_1)$ и двумерной условной плотностью распределения $f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1)$, которая называется плотностью перехода. Более того, поскольку

$$\lim_{t_1 \rightarrow -\infty} f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) = f(\xi_2; t_2),$$

можно утверждать, что плотность перехода полностью описывает МСП.

Сформулируем уравнение, которому удовлетворяют все МСП. Для этого выделим три последовательно расположенных друг за другом сечения случайного процесса $t_1 \leq t' \leq t_2$ (рис. 8) и запишем для них

$$f(\xi_2, \xi'; t_2, t' | \xi_1; t_1) = f(\xi_2; t_2 | \xi'; t') f(\xi'; t' | \xi_1; t_1).$$

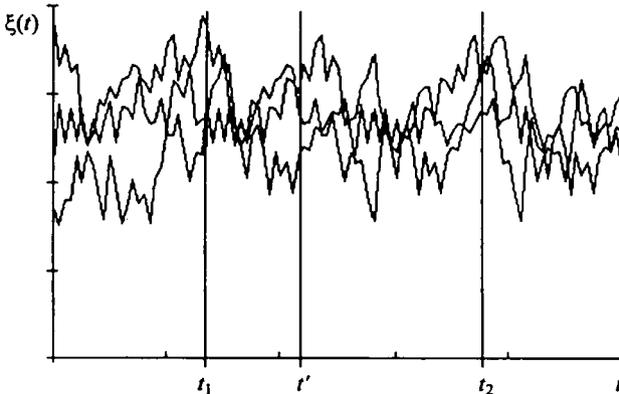


Рис. 8. К определению марковского процесса и выводу уравнения Смолуховского

Проведем здесь интегрирование в бесконечных пределах в промежуточном сечении t' :

$$f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_2; t_2 | \xi'; t') f(\xi'; t' | \xi_1; t_1) d\xi'. \quad (2.11)$$

Это интегральное уравнение известно как уравнение Смолуховского.

Важно подчеркнуть, что все реальные процессы имеют тенденцию становиться марковскими при раздвижении во времени между собой сечений СП. Если марковским процессом является стационарный СП, то будем писать

$$f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) = f(\xi_2; \tau | \xi_1),$$

где $\tau = t_2 - t_1$.

2.2.2. Нормальные марковские случайные процессы

Некоторое подобие в описании нормальных и марковских процессов, на которое было указано в начале предыдущего пункта, наводит на вопрос: может ли марковский процесс быть нормальным или, наоборот, нормальный процесс – марковским? Чтобы ответить на этот вопрос, подставим найденную нами условную плотность перехода нормального СП (2.4) в уравнение Смолуховского (2.11). При этом ограничимся случаем центрированных стационарных СП и обозначим $\sigma_2^2 = \sigma_1^2 \equiv \sigma^2$.

Перейдем к характеристической функции перехода как преобразованию Фурье от плотности перехода:

$$\begin{aligned} \varphi(u; \tau | \xi_1) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_2; \tau | \xi_1) \exp(iu\xi_2) d\xi_2 = \\ &= \exp\left\{iu\xi_1 R(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}u^2 \sigma^2 (1 - R^2(t_2 - t_1))\right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Уравнение Смолуховского (2.10) после преобразования Фурье трансформируется в

$$\varphi(u; t_2 - t_1 | \xi_1) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u; t_2 - t' | \xi') f(\xi'; t' - t_1 | \xi_1) d\xi'.$$

Подставив в него явный вид характеристической функции перехода (2.12), имеем

$$\begin{aligned}
& \exp\left\{iu\xi_1 R(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}u^2\sigma^2(1 - R^2(t_2 - t_1))\right\} = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{iu\xi'_1 R(t_2 - t'_1) - \frac{1}{2}u^2\sigma^2(1 - R^2(t_2 - t'_1))\right\} f(\xi'_1; t'_1 - t_1 | \xi_1) d\xi'_1 = \\
& = \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\sigma^2(1 - R^2(t_2 - t'_1))\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iu\xi'_1 R(t_2 - t'_1)\} f(\xi'_1; t'_1 - t_1 | \xi_1) d\xi'_1.
\end{aligned}$$

Интегральный член в свою очередь выражается через характеристическую функцию перехода так, что далее имеем

$$\begin{aligned}
& \exp\left\{iu\xi_1 R(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}u^2\sigma^2(1 - R^2(t_2 - t_1))\right\} = \\
& = \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\sigma^2(1 - R^2(t_2 - t'_1))\right\} \times \\
& \times \exp\left\{iu\xi_1 R(t_2 - t'_1)R(t'_1 - t_1) - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 R^2(t_2 - t'_1)(1 - R^2(t'_1 - t_1))\right\}.
\end{aligned}$$

Приравнявая показатели экспоненты в левой и в правой частях полученного равенства, в результате получаем уравнение

$$R(t_2 - t_1) = R(t_2 - t'_1)R(t'_1 - t_1). \quad (2.13)$$

Это функциональное уравнение должно тождественно удовлетворяться, чтобы МСП был нормальным СП.

Решим (2.13), сведя его к дифференциальному уравнению. Предварительно перепишем (2.13) как $R(\tau_1 + \tau_2) = R(\tau_1)R(\tau_2)$. Путем дифференцирования его по τ_1 и, положив затем $\tau_1 = 0$, имеем дифференциальное уравнение

$$R'(\tau_2) = R(\tau_2)R'(0).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$R(\tau_2) = c \cdot \exp\{-\alpha\tau_2\},$$

где $\alpha \equiv -R'(0)$, $c = \text{const}$.

Учитывая далее, что $R(0) = 1$, и используя свойство четности КФ, получаем искомый вид коэффициента корреляции:

$$R(t_2 - t_1) = \exp(-\alpha|t_2 - t_1|). \quad (2.14)$$

Соответствующий энергетический спектр имеет вид

$$W(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

2.2.3. Диффузионные процессы. Уравнения Колмогорова

Марковские СП являются хорошей моделью многих естественных процессов, наблюдаемых в радиофизике, поэтому интерес к ним не ослабевает и в настоящее время. Уравнение Смолуховского является нелинейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода, ядром которого является сама же искомая функция – плотность перехода. Аналитических методов строгого решения таких уравнений не разработано. С целью разрешения ситуации уравнения Смолуховского в результате некоторых упрощающих предположений сводят к дифференциальным уравнениям, которые получили название уравнений Колмогорова. Эти уравнения хотя и в частных производных, но для их решения применимы известные методы. Получим одно из этих уравнений, сформулируем еще одно уравнение, а затем в последующем решим его.

Итак, пусть мы имеем три некоторых сечения МСП в следующие друг за другом моменты времени: $t_1 \leq t' \leq t_2$. Попробуем сблизить первый и второй моменты времени: $t' = t_1 + \Delta t$, $\Delta t \rightarrow 0$. Предварительно воспользовавшись условием нормировки для плотности перехода:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi'; t' = t_1 + \Delta t | \xi_1; t_1) d\xi',$$

запишем, что

$$f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1 + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1 + \Delta t) f(\xi'; t_1 + \Delta t | \xi_1; t_1) d\xi'. \quad (2.15)$$

Положив теперь в уравнении Смолуховского $t' = t_1 + \Delta t$, вычтем из него почленно тождество (2.15) и получим новое эквивалентное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) - f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1 + \Delta t) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} [f(\xi_2; t_2 | \xi'; t_1 + \Delta t) - f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1 + \Delta t)] f(\xi'; t_1 + \Delta t | \xi_1; t_1) d\xi'. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Квадратную скобку под интегралом разложим формально в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} & [f(\xi_2; t_2 | \xi'; t_1 + \Delta t) - f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1 + \Delta t)] = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi' - \xi_1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \xi_1^n} f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1 + \Delta t). \end{aligned}$$

После этого, поделив левую и правую части уравнения (2.16) на Δt и совершив предельный переход $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$-\frac{\partial f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1)}{\partial t_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\xi_1; t_1)}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \xi_1^n} f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1),$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} A_n(\xi_1; t_1) & \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi' - \xi_1)^n}{\Delta t} f(\xi'; t_1 + \Delta t | \xi_1; t_1) d\xi' = \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \frac{[\xi(t_1 + \Delta t) - \xi_1(t_1)]^n | \xi_1(t_1)}{\Delta t} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Физически логично предположить, что в результате предельного перехода только два первых коэффициента останутся отличными от нуля, а все остальные $A_n(\xi_1; t_1) = 0$ при $n \geq 3$. В результате мы приходим к первому уравнению Колмогорова:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1)}{\partial t_1} = \\ & = A_1(\xi_1; t_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) + \frac{1}{2} A_2(\xi_1; t_1) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Это уравнение известно также как уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова.

Уравнение (2.18) необходимо дополнить начальным и граничными условиями. Граничные условия для неограниченной области достаточно очевидны:

$$f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) \Big|_{\xi_1 \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_1} f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) \Big|_{\xi_1 \rightarrow \pm\infty} = 0.$$

Начальное условие записывается как

$$f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) \Big|_{t_1 = t_2} = \delta(\xi_2 - \xi_1)$$

и получается, если учесть, что при $t_2 = t_1$ процесс $\xi(t_2)$ принимает вполне определенное – уже измеренное значение $\xi(t_1)$.

Если теперь подобным же образом в уравнении Смолуховского заняться предельным переходом $t' = t_2 - \Delta t$, $\Delta t \rightarrow 0$, то можно получить сопряженное дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1)}{\partial t_2} = \\ & = -\frac{\partial}{\partial \xi_2} [A_1(\xi_2; t_2) f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} [A_2(\xi_2; t_2) f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1)], \end{aligned} \quad (2.19)$$

где
$$A_n(\xi_2; t_2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \frac{[\xi(t_2) - \xi(t_2 - \Delta t)]^n | \xi(t_2 - \Delta t)}{\Delta t} \right\rangle.$$

Граничные и начальное условия записываются аналогично:

$$f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) \Big|_{\xi_2 \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_2} f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) \Big|_{\xi_2 \rightarrow \pm\infty} = 0,$$

и
$$f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) \Big|_{t_1 = t_2} = \delta(\xi_2 - \xi_1).$$

Уравнение (2.19) известно как второе уравнение Колмогорова.

В случае стационарных процессов уравнения Колмогорова записываются как

$$\frac{\partial f(\xi_2; \tau | \xi_1)}{\partial \tau} = A_1(\xi_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} f(\xi_2; \tau | \xi_1) + \frac{1}{2} A_2(\xi_1) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} f(\xi_2; \tau | \xi_1)$$

и
$$\frac{\partial f(\xi_2; \tau | \xi_1)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \xi_2} [A_1(\xi_2) f(\xi_2; \tau | \xi_1)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} [A_2(\xi_2) f(\xi_2; \tau | \xi_1)].$$

Случайные процессы, плотности перехода которых описываются уравнениями Колмогорова, называются диффузионными СП, поскольку

такие же уравнения и описывают явление диффузии в физике. Коэффициенты A_1 и A_2 , определяемые в (2.17), называются коэффициентами сноса и диффузии соответственно.

2.2.4. Процессы с независимыми приращениями

Рассмотрим частный случай стационарного диффузионного СП, у которого $A_1 = 0$ и $A_2 = 1$. В этом случае второе уравнение Колмогорова записывается как

$$\frac{\partial f(\xi_2; \tau | \xi_1)}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} f(\xi_2; \tau | \xi_1). \quad (2.20)$$

Начальное и граничные условия имеют вид

$$f(\xi_2; \tau | \xi_1) \Big|_{\tau=0} = \delta(\xi_2 - \xi_1)$$

$$\text{и} \quad f(\xi_2; \tau | \xi_1) \Big|_{\xi_2 \rightarrow \pm\infty} = \frac{\partial}{\partial \xi_2} f(\xi_2; \tau | \xi_1) \Big|_{\xi_2 \rightarrow \pm\infty} = 0.$$

Применим преобразование Фурье к уравнению (2.20) и с учетом граничных условий перейдем к уравнению для характеристической функции перехода:

$$\frac{\partial \varphi(u; \tau | \xi_1)}{\partial \tau} = -\frac{u^2}{2} \varphi(u; \tau | \xi_1). \quad (2.21)$$

Начальное условие при этом трансформируется в

$$\varphi(u; \tau | \xi_1) \Big|_{\tau=0} = \exp\{iu\xi_1\}.$$

Решая (2.21) с учетом начального условия, получаем

$$\varphi(u; \tau | \xi_1) = \exp\left\{iu\xi_1 - \frac{1}{2}u^2\tau\right\}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получим окончательно для плотности перехода

$$f(\xi_2; \tau | \xi_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{2\tau}\right\}. \quad (2.22)$$

Как видно, решение (2.22) представляет собой плотность распределения нормального СП, дисперсия которого линейно нарастает: $\sigma_{\xi_2|\xi_1}^2 = \tau$.

В многомерном случае можно записать

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n | \xi_0) = f(\xi_1; \tau_1 | \xi_0) f(\xi_2; \tau_2 | \xi_1) \dots f(\xi_n; \tau_n | \xi_{n-1}),$$

где $\tau_1 = t_1 - t_0, \tau_2 = t_2 - t_1, \dots, \tau_n = t_n - t_{n-1}$. Плотность распределения факторизуется по распределениям приращений процесса от сечения к сечению: $\Delta \xi_n = \xi_n - \xi_{n-1}, n = 1, 2, \dots$ Это означает, что рассмотренный МСП является процессом с независимыми приращениями. СП, у которых приращения независимы, а дисперсия приращений линейно нарастает с увеличением временного интервала, называются винеровскими.

2.2.5. Белый шум и винеровский процесс

Рассмотрим пример процесса, который можно считать винеровским. Пусть некоторый СП $\eta(t)$ является результатом накопления (интегрирования) белого шума $\xi(t)$:

$$\eta(t) = \int_{t_0}^t \xi(t') dt'. \quad (2.23)$$

Исследуем его свойства на предмет соответствия винеровскому процессу. Выделим множество неперекрывающихся временных интервалов: $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_n$.

Рассмотрим различные приращения процесса (2.23):

$$\Delta \eta_n = \eta(t_n) - \eta(t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \xi(t') dt'. \quad (2.24)$$

Очевидно, в силу центрированности белого шума центрированными будут и приращения: $\langle \Delta \eta_n \rangle = 0$. Далее, в силу δ -коррелированности белого шума этот интеграл может быть представлен суммой большого числа независимых слагаемых так, что согласно центральной предельной теореме процесс (2.24) будет распределен по нормальному закону:

$$f(\Delta \eta_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} \exp \left\{ -\frac{\Delta \eta_n^2}{2\sigma_n^2} \right\}.$$

Вычислим дисперсию приращения

$$\sigma_n^2 = \langle \Delta\eta_n^2 \rangle = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} K(t' - t'') dt' dt'' = W_0 \cdot \tau_n, \quad \tau_n = t_n - t_{n-1}.$$

Оказалось, она растет прямо пропорционально длине интервала.

Для полного соответствия винеровскому процессу осталось доказать независимость приращений. Поскольку приращения распределены по нормальному закону, достаточно доказать некоррелированность приращений. Корреляция приращений записывается как

$$K_{n,m} = \langle \Delta\eta_n \Delta\eta_m \rangle = W_0 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \delta(t' - t'') dt' dt'' = 0 \quad \text{при } n \neq m,$$

поскольку все интервалы не перекрываются.

Таким образом, мы доказали, что результат накопления белого шума образует винеровский процесс.

2.3. Дробовой шум

Под дробовыми шумами обычно понимают шумы в радиоэлектронных устройствах, связанные с дискретностью носителей зарядов, образующих токи. Такие шумы существуют как при электронном и ионном, так и при дырочном токах. Эти шумы отсутствуют для токов смещения. Центральное место в теории дробового шума занимает представление о пуассоновских процессах.

2.3.1. Распределение Пуассона

Пусть в течение большого, но конечного времени T в случайные моменты времени t_k возникают короткие неперекрывающиеся импульсы. Форма этих импульсов пока не существенна. Будем считать, что импульсы возникают независимо и редко.

Поясним понятие редкости. Редко – это значит, что на малом промежутке времени появление одного импульса маловероятно, точнее, вероятность его появления пропорциональна длине этого малого интервала:

$$p(1, \Delta t) = \gamma \Delta t + o(\Delta t). \quad (2.25)$$

Здесь γ – некоторый коэффициент пропорциональности. Вероятность же появления двух и более импульсов есть величина более высокого

порядка малости:

$$p(k, \Delta t) = o(\Delta t), \quad k \geq 2. \quad (2.26)$$

Исходя из сделанных предположений, рассчитаем, с какой вероятностью появится ровно N импульсов на всем интервале наблюдения $[0, T]$. Для этого сначала предположим, что мы уже знаем эту вероятность $p(N, T)$. Оценим, как она изменится, если интервал слегка увеличить на Δt . По правилу сложения вероятностей независимых событий можно записать

$$p(N, T + \Delta t) = p(N, T)p(0, \Delta t) + p(N-1, T)p(1, \Delta t) + \\ + p(N-2, T)p(2, \Delta t) + \dots + p(0, T)p(N, \Delta t).$$

Учитывая редкость событий, т.е. (2.25) и (2.26)

$$p(N, T + \Delta t) = p(N, T)[1 - \gamma\Delta t] + p(N-1, T)\gamma\Delta t + o(\Delta t).$$

Выделим здесь приращение вероятности

$$p(N, T + \Delta t) - p(N, T) = -p(N, T)\gamma\Delta t + p(N-1, T)\gamma\Delta t + o(\Delta t).$$

Поделив левую и правую части на Δt и переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dT} p(N, T) = -\gamma[p(N, T) - p(N-1, T)]. \quad (2.27)$$

Точнее говоря, это не одно уравнение, а система зацепляющихся дифференциальных уравнений ($N = 0, 1, 2, \dots$).

Решение уравнений (2.27) требует задания начальных условий. В качестве таковых могут быть взяты $p(0, 0) = 1$, $p(1, 0) = 0$, $p(2, 0) = 0$ и т.д. Очевидно, нужно добавить, что $p(-1, T) = 0$.

Решение первого из уравнений (2.27) получается элементарно:

$$p(0, T) = \exp\{-\gamma T\}.$$

Второе уравнение записывается как

$$\frac{d}{dT} p(1, T) = -\gamma p(1, T) + \gamma \cdot \exp\{-\gamma T\},$$

а его решением, как легко проверить, будет функция

$$p(1, T) = \gamma T \cdot \exp\{-\gamma T\}.$$

По индукции получается, что

$$p(N, T) = \frac{(\gamma T)^N}{N!} \exp\{-\gamma T\}. \quad (2.28)$$

Это распределение известно как распределение Пуассона. Оно описывает вероятность появления N импульсов на интервале T .

Найдем некоторые средние величины, связанные с распределением Пуассона.

1. Среднее число импульсов за время T :

$$\langle N \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} N p(N, T) = \exp\{-\gamma T\} \sum_{N=1}^{\infty} N \frac{(\gamma T)^N}{N!} = \gamma T.$$

За единичный интервал времени происходит $\langle N \rangle / T = \gamma$ событий. Это позволяет установить физический смысл введенного ранее коэффициента пропорциональности γ .

2. Дисперсия числа импульсов получается, если сначала рассчитать

$$\langle N^2 \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} N^2 p(N, T) = \exp\{-\gamma T\} \sum_{N=1}^{\infty} N^2 \frac{(\gamma T)^N}{N!} = \gamma T (1 + \gamma T).$$

Для дисперсии числа импульсов тогда получается

$$\sigma_N^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \gamma T = \langle N \rangle.$$

3. Плотность распределения интервалов между импульсами $f(\tau)$ можно получить, если учесть, что вероятность отсутствия импульсов на интервале T связана с искомой плотностью простым соотношением

$$p(0, T) = P\{\tau \geq T\} = \int_T^{\infty} f(\tau) d\tau = \exp\{-\gamma T\}.$$

В результате путем дифференцирования находим $f(\tau) = \gamma \exp(-\gamma\tau)$.

4. Средний интервал между событиями оценивается как

$$\langle \tau \rangle = \int_0^{\infty} \tau f(\tau) d\tau = 1/\gamma.$$

2.3.2. Пуассоновский поток дельта-импульсов

Определим случайный поток δ -импульсов как сумму (рис. 9):

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^N \delta(t - t^{(k)}), \quad t^{(k)} \in [0, T].$$

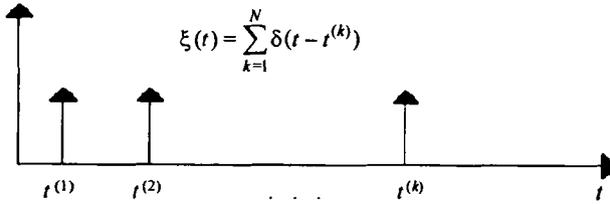


Рис. 9. Пуассоновский поток дельта-импульсов

Здесь величины $t^{(k)}$ означают моменты появления δ -импульсов. Случайными являются: общее число импульсов N , появившихся за время T , и моменты появления импульсов $t^{(k)}$. Примем, что число импульсов распределено по закону Пуассона (2.28). Моменты появления импульсов ни от чего не зависят и потому распределены равномерно на интервале $[0, T]$:

$$f(t^{(k)}) = \frac{1}{T}, \quad t^{(k)} \in [0, T].$$

Сделанные предположения составляют параметрическую модель СП – пуассоновского потока δ -импульсов.

Найдем среднее значение и корреляционную функцию этого СП.

Среднее значение вычислим, зафиксировав сначала число импульсов.

С учетом результатов предыдущего раздела усредним далее по числу импульсов:

$$\langle \xi(t) \rangle = \frac{\langle N \rangle}{T} = \gamma.$$

Для расчета корреляционной функции предварительно вычислим второй начальный момент:

$$\langle \xi(t_1) \xi(t_2) | N \rangle = \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N \langle \delta(t_1 - t^{(k)}) \delta(t_2 - t^{(n)}) \rangle.$$

Разобьем сумму на две, выделив члены с повторяющимися индексами:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t_1) \xi(t_2) | N \rangle &= \sum_{k=1}^N \langle \delta(t_1 - t^{(k)}) \delta(t_2 - t^{(k)}) \rangle + \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{n=1, n \neq k}^N \langle \delta(t_1 - t^{(k)}) \delta(t_2 - t^{(n)}) \rangle. \end{aligned}$$

В результате, используя независимость моментов появления импульсов и свойства δ -импульсов, имеем

$$\langle \xi(t_1)\xi(t_2)|N \rangle = \delta(t_1 - t_2) \frac{N}{T} + \frac{N(N-1)}{T^2}.$$

Усреднение по числу импульсов дает

$$\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2)\gamma + \gamma^2.$$

Для корреляционной же функции получается выражение

$$K(t_1 - t_2) = \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle - \langle \xi(t_1) \rangle \langle \xi(t_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2)\gamma.$$

Таким образом, можно сделать вывод: пуассоновский поток δ -импульсов образует стационарный δ -коррелированный процесс, т.е. представляет собой белый шум, энергетический спектр которого есть $W_0 = \gamma$.

2.3.3. Параметрическая модель дробового шума

Представим себе простейшее радиоэлектронное устройство – вакуумный диод, который находится под разностью потенциалов V . Спонтанно, в случайные моменты времени $t^{(k)}$ из катода вылетают электроны и далее, ускоряясь под действием электрического поля $E = V/d$, преодолевают межэлектродный промежуток длиной d и оказываются на аноде. Движение отдельного электрона описывается вторым законом Ньютона:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = eE.$$

Здесь m, e – масса и заряд электрона. Решим это уравнение движения, полагая, что в момент вылета электрона его скорость и ускорение были нулевыми:

$$x(t) = \frac{eV}{2md} t^2 = d \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^2.$$

Величина $\tau_0 = d \sqrt{\frac{2m}{eV}}$ – время пролета электроном межэлектродного промежутка.

Для вычисления наводимого электроном тока оценим сначала величину индуцированного на аноде заряда $q(t)$ в некоторый конкретный момент времени t . Работа, затрачиваемая на это, равна потенциальной

энергии электрона, затрачиваемой на его ускорение:

$$A = eEx(t) = Vq(t).$$

Отсюда находятся индуцированный заряд и наведенный ток:

$$q(t) = e \frac{x(t)}{d}, \quad j_e(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{2e}{\tau^2} t. \quad (2.29)$$

Этот результат означает, что элементарный ток на аноде от одного электрона начинает наводиться в момент его вылета из катода и заканчивается, когда электрон достигает анода. Форма тока имеет пилообразный вид (2.29).

При вылете из катода N электронов полный ток в диоде задается суммой (рис. 10):

$$J(t) = \sum_{k=1}^N j_e(t - t^{(k)}), \quad t^{(k)} \in [0, T]. \quad (2.30)$$

Случайными являются: общее число вылетевших за время T электронов N и моменты вылета электронов $t^{(k)}$. Полный случайный ток $J(t)$ и называется дробовым шумом. Формула (2.30) дает его параметрическую модель.

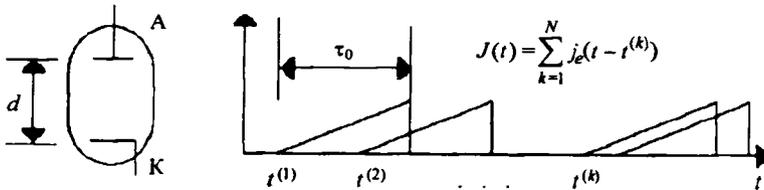


Рис. 10. К модели дробового шума

Дробовой шум можно связать с рассмотренной ранее идеализированной моделью, если записать

$$J(t) = \int_{-\infty}^{\infty} j_e(t - t') \xi(t') dt'. \quad (2.31)$$

С формальной точки зрения формула (2.31) говорит, что дробовой шум можно представить как результат прохождения пуассоновского потока δ -импульсов через линейную систему, импульсная характеристика которой описывается элементарным током (2.29).

2.3.4. Среднее значение и функция корреляции дробового шума

Вычислим сначала среднее значение дробового шума. Согласно (2.31), с учетом результатов п. 2.3.2 можно записать

$$\langle J(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} j_e(t-t') \langle \xi(t') \rangle dt' = \gamma \int_0^{\tau_0} \frac{2e\tau'}{\tau_0^2} dt' = \gamma e.$$

Для корреляционной функции дробового шума при этом имеем

$$\begin{aligned} K_J(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} j_e(t_1-t') j_e(t_2-t'') K(t'-t'') dt' dt'' = \\ &= \gamma \int_{-\infty}^{\infty} j_e(t_1-t') j_e(t_2-t') dt'. \end{aligned}$$

Путем замены переменной $\tau' = t_1 - t'$ этот результат можно переписать в виде

$$K_J(t_1, t_2) = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} j_e(\tau') j_e(t_2 - t_1 + \tau') d\tau' = K_J(t_1 - t_2).$$

Последнее означает, что дробовой шум – это стационарный СП. Вычисление сводится к временной корреляции двух треугольных функций и дает несколько громоздкий вид.

Дисперсия дробового шума оценивается как

$$\sigma_J^2 = \gamma \int_0^{\tau_0} \left(\frac{2e\tau'}{\tau_0^2} \right)^2 d\tau' = \frac{4e^2\gamma}{3\tau_0} = \frac{4\langle J \rangle^2}{3\gamma\tau_0}.$$

2.3.5. Энергетический спектр дробового шума. Формула Шоттки

Установленная выше стационарность дробового шума позволяет вычислить его энергетический спектр непосредственно из п. 2.3.4:

$$W_J(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_J(\tau) \exp\{i\omega\tau\} d\tau = \gamma |j_e(\omega)|^2,$$

где

$$j_e(\omega) \equiv \int_0^{\tau_0} j_e(t) \exp\{i\omega t\} dt = \frac{2e}{(\omega\tau_0)^2} \int_0^{\omega\tau_0} x \exp\{ix\} dx.$$

Разложение стоящей под интегралом экспоненты в ряд Тейлора позволяет представить результат в виде ряда по степеням $(\omega\tau_0)$ как параметра:

$$j_e(\omega) \equiv 2e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k (\omega\tau_0)^k}{k!(k+2)} = e + O(i\omega\tau_0).$$

В результате окончательно для энергетического спектра дробового шума можно записать

$$W_J(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_J(\tau) \exp\{i\omega\tau\} d\tau = \gamma e^2 + o(\omega\tau_0).$$

Таким образом, низкочастотный участок спектра аппроксимируется формулой

$$W_J(\omega) = \gamma e^2 = \langle J \rangle e.$$

Эта формула известна как формула Шоттки.

Область применимости формулы Шоттки определяется требованием, чтобы частоты были не слишком велики $(\omega\tau_0) \ll 1$. Обычно время пролета межэлектродного промежутка невелико $\tau_0 \approx 10^{-5}$ с, поэтому частоты не должны превышать величины $f = \omega/2\pi \leq 10$ кГц. Иными словами, в пределах звукового диапазона дробовой шум подобен белому шуму.

2.4. Тепловой шум

Тепловой шум возникает во всех проводниках, находящихся при некоторой термодинамической температуре T . Известно, что температура является мерой хаотического движения молекул вещества. Электроны также находятся в состоянии хаотического движения. Хаотическое тепловое движение носителей заряда на границах проводника воспринимается как некоторая сторонняя хаотическая ЭДС. В результате к передаваемым по проводникам сигналам всегда добавляется действие тепловой ЭДС, т.е. добавляются тепловые шумы. Эти шумы существенно затрудняют прием слабых сигналов.

Для построения модели тепловой ЭДС мысленно разделим проводник на два одинаковых проводника, находящихся между собой в термодинамическом равновесии и соединенных некоторым гипотетически

идеальным проводником (рис. 11). Образуется замкнутая цепь, в которую включены два резистора-проводника с сопротивлением $R_1 = R_2 = R$, которые сами же являются источниками ЭДС: $e_1 = e_2 = e$.

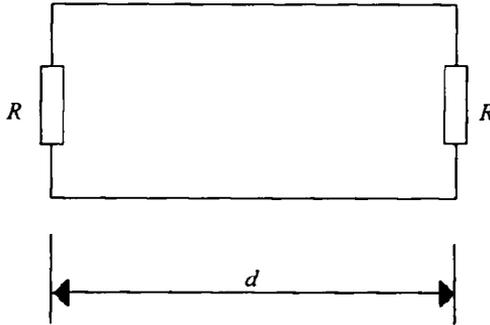


Рис. 11. К модели теплового шума

Первый резистор служит источником ЭДС, которая действует в замкнутой цепи и вызывает выделение тепловой мощности на втором резисторе. Средняя величина этой мощности оценивается как $\langle P_1 \rangle = \langle e^2 \rangle / 4R$. В свою очередь второй резистор передает точно такую же мощность, которая выделяется затем на первом резисторе.

Будем считать, что система из двух резисторов находится в термодинамическом равновесии, по крайней мере, в полосе частот $\Delta\omega$. Если обозначить как $W_e(\omega)$ энергетический спектр тепловой ЭДС, развиваемой каждым резистором, то на полосу частот $\Delta\omega$ приходится средняя интенсивность флуктуаций равная $\langle e^2 \rangle = 2\Delta\omega W_e(\omega)$. Полная же мощность, курсирующая в системе, определяется как

$$\langle P \rangle = 2\langle P_1 \rangle = \frac{W_e(\omega)\Delta\omega}{R}. \quad (2.32)$$

Свяжем эту мощность с термодинамической температурой системы T . Как известно из термодинамики, энергия колебательной термодинамической системы определяется формулой

$$E = NkT,$$

где N – число колебательных степеней свободы, k – постоянная Больцмана. Определим число степеней свободы для нашей идеализированной системы.

Представим, что между выделенными нами двумя резисторами реализуется стоячая волна. Естественно, что для реализации устойчивого режима на линии, соединяющей резисторы, должно укладываться целое число полуволн, т.е. должно выполняться условие

$$m \cdot \frac{\lambda}{2} = d.$$

Здесь λ – длина волны, а d – длина некоторой длинной линии, соединяющей резисторы, m – целое число. Если v – фазовая скорость распространения волны в линии, то частоты, соответствующие этим волнам равны

$$\omega_m = 2\pi \frac{v}{\lambda} = m \cdot \frac{\pi v}{d}.$$

Шаг следования этих эквидистантных частот определяется как

$$\delta\omega = \frac{\pi v}{d}.$$

Тогда в выделенной нами общей полосе термодинамического равновесия будет укладываться

$$N = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} = \frac{\Delta\omega}{\pi v} d$$

различных частот, которое и есть число колебательных степеней свободы нашей системы. Вся приходящаяся на эти степени свободы энергия будет переноситься за время распространения волны от одного резистора к другому: $\Delta t = d/v$. В результате средняя термодинамическая мощность, переносимая в полосе $\Delta\omega$ системой, равна

$$\langle P \rangle = \frac{E}{\Delta t} = \frac{kT\Delta\omega}{\pi}. \quad (2.33)$$

Приравнявая (2.32) и (2.33), окончательно находим для энергетического спектра тепловой ЭДС следующую оценку:

$$W_e(\omega) = \frac{1}{\pi} kTR. \quad (2.34)$$

Эта формула известна как формула Найквиста. Согласно (2.34), тепловой шум – белый шум. Однако это справедливо только для относительно низких частот.

Отметим, по крайней мере, два неучтенных нами фактора:

1. При термодинамическом рассмотрении мы считали, что на одну степень свободы приходится энергия $E_0 = kT$. При квантовом подходе используется более точная формула:

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{\exp\left\{\frac{\hbar\omega}{kT}\right\} - 1},$$

которая переходит в использованную нами при низких частотах $\omega \ll kT/\hbar$. Использование более точной формулы даст уменьшение энергетического спектра на высоких частотах.

2. При рассмотрении баланса мощностей в электрической цепи мы не учли ни одного реактивного элемента, хотя известно, что любой резистор имеет емкость C . Если учесть её, то в (2.34) необходимо провести замену

$$R \rightarrow \frac{R}{1 + (\omega RC)^2}.$$

Влияние знаменателя будет несущественно лишь при $\omega \ll 1/RC$. Учет же его даст уменьшение $W_e(\omega)$ на высоких частотах.

2.5. Фликер-шум

Заканчивая раздел о моделях шумов в электронных приборах, хочется упомянуть о так называемых фликер-шумах. Экспериментально было выяснено, что в некоторых приборах на очень низких частотах ($f < 0,1$ Гц – 1 кГц) возникают шумы, для которых $W(\omega) \neq \text{const}$. Для этих шумов, называемых фликер-шумами, обычно

$$W_F(\omega) \approx \frac{I^\gamma}{\omega^\alpha}, \quad \gamma \approx 2, \quad \alpha \approx 1.$$

Величина I – это сила протекающего тока. Дисперсия таких шумов бесконечно велика и теория стационарных процессов к ним не применима. Относительно удовлетворительное описание этих шумов удастся построить при использовании СП со стационарными приращениями. Однако законченной модели фликер-шумов пока нет.

Физически происхождение фликер-шумов обычно связывают со старением электронных приборов, когда, например, с катода вылетают не

только электроны, но и более крупные образования. Существуют и другие подходы. Интерес к этим шумам в научной литературе периодически то усиливается, то ослабевает.

2.6. Контрольные вопросы

- Каковы условия выполнения центральной предельной теоремы?
- Чему равнозначно условие независимости нормальных случайных процессов?
- Как найти коэффициент корреляции с помощью регрессионных прямых?
- Сформулировать основное уравнение для марковских процессов.
- При каком условии нормальный случайный процесс становится марковским?
- При каком условии диффузионный процесс обладает независимыми приращениями?
- Что означает условие редкости событий для распределения Пуассона?
- Как записать пуассоновский поток δ -импульсов?
- Какова связь дробового шума с «белым» шумом?
- Что описывает формула Шоттки?
- Как температура влияет на тепловой шум?

Глава 3

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Случайные процессы в радиофизике, какого бы они ни были происхождения, исследуются с помощью радиоэлектронных систем. Эти системы включают в себя как пассивные, так и активные элементы. Проходя через них, сигналы, несущие информацию о СП, искажаются. К полезным составляющим добавляются новые шумы, искажается спектральный состав и форма сигналов. Понимание происходящих изменений важно для правильной интерпретации данных и управления ими. В ряду всех возможных систем на первом месте стоят линейные системы как вносящие минимальные искажения. С них и начнем.

3.1. Линейная фильтрация

Линейные системы обычно описываются с помощью простейших системных функций, например передаточной функции, функции включения, импульсной характеристики и др. В общем случае, когда сигналы являются векторными, используются матричные системные функции. Мы ограничимся рассмотрением скалярных функций и будем считать линейную систему детерминированной. Случайными являются входные и, как следствие, выходные сигналы.

Простейшей линейной системой является линейный фильтр, имеющий передаточную функцию $H(\omega)$ как реакцию на монохроматический сигнал с частотой ω . Передаточная функция (ПФ) связана с импульсной характеристикой $h(t)$ фильтра преобразованием Фурье

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp\{i\omega t\} dt. \quad (3.1)$$

Функция $|H(\omega)|$ называется амплитудно-частотной характеристикой фильтра (АЧХ). Импульсная характеристика (ИХ) – это реакция систе-

мы на δ -импульс (рис. 12) и для физически реализуемых фильтров должна удовлетворять принципу причинности: $h(t) = h(t)\chi(t)$, где

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

– ступенчатая функция Хевисайда.



Рис. 12. К введению понятия импульсной характеристики линейной системы

Поскольку понятие δ -импульса есть некоторая математическая идеализация, то ИХ тоже есть идеализация, которую следует понимать как обратное преобразование Фурье от ПФ:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp\{-i\omega t\} d\omega.$$

Далее, поскольку $h(t)$ – это вещественная функция, то, как следует из (3.1), ПФ должна удовлетворять условию $H(\omega) = H^*(-\omega)$.

Сигнал на выходе линейного фильтра записывается как свертка входного сигнала и ИХ:

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t')\xi(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} h(t'')\xi(t-t'') dt''. \quad (3.2)$$

Если входной сигнал – случайный процесс, то выходной процесс тоже СП. Будем считать, что $\xi(t)$ – стационарный СП.

Согласно (3.2) и (3.1), можно сразу записать, что

$$\langle \zeta(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t') \langle \xi(t') \rangle dt' = \langle \xi \rangle H(0).$$

Это означает, что если фильтр не пропускает нулевых частот, то выходной процесс центрируется. Реализуется это, например, простым включением в электрическую цепь конденсатора. Для корреляционной функции выходного процесса имеем

$$K_{\zeta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau') h(\tau'') K_{\xi}(\tau'' - \tau' + t_2 - t_1) d\tau' d\tau'' = K_{\xi}(t_2 - t_1).$$

Видно, что выходной СП оказывается также стационарным.

Рассчитаем энергетический спектр выходного процесса как преобразование Фурье от полученной корреляционной функции. После несложных преобразований имеем

$$W_{\zeta}(\omega) = W_{\xi}(\omega) |H(\omega)|^2. \quad (3.3)$$

Здесь $W_{\xi}(\omega)$ – энергетический спектр входного процесса. Из этой формулы следует, что после линейной фильтрации энергетический спектр СП может только сужаться, но не расширяться.

Действительно, поскольку интегральная ширина энергетического спектра СП определяется как

$$\Omega_{\zeta} = \frac{1}{\max W_{\zeta}(\omega)} \int_0^{\infty} W_{\zeta}(\omega) d\omega = \frac{1}{\max W_{\xi}(\omega) |H(\omega)|^2} \int_0^{\infty} W_{\xi}(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega,$$

то, применив теорему о среднем для интеграла, можем записать

$$\Omega_{\zeta} = \frac{|H(\bar{\omega})|^2}{\max W_{\xi}(\omega) |H(\omega)|^2} \int_0^{\infty} W_{\xi}(\omega) d\omega.$$

Здесь $\bar{\omega}$ – некоторая средняя частота из спектра. При вычислении максимума в знаменателе вряд ли эта частота будет оптимальной, поэтому

$$\max W_{\xi}(\omega) |H(\omega)|^2 \geq |H(\bar{\omega})|^2 \max W_{\xi}(\omega).$$

В результате имеем оценку

$$\Omega_{\zeta} \leq \frac{1}{\max W_{\xi}(\omega)} \int_0^{\infty} W_{\xi}(\omega) d\omega = \Omega_0.$$

Утверждение доказано.

Согласно соотношению неопределенности (1.24) уменьшение ширины энергетического спектра приведет к увеличению масштаба корреля-

ции. Таким образом, после линейной фильтрации корреляционные связи СП только расширяются.

3.2. Интегральные характеристики линейного фильтра

Рассматривая квадрат АЧХ $|H(\omega)|^2$ как некую энергетическую характеристику линейного фильтра, введем понятие энергетического отклика фильтра как обратное преобразование Фурье от неё:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) H^*(\omega) \exp\{-i\omega t\} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} h(t' - t) h(t') dt'.$$

Эта характеристика обычно используется в теории согласованной фильтрации и теории распознавания образов. Подобно тому, как это мы сделали в п. 1.5 и п. 1.10 для корреляционной функции и энергетического спектра СП, для описания линейного фильтра можно ввести понятия интегральной полосы пропускания Ω_f и интегральной длительности отклика τ_f фильтра:

$$\Omega_f = \frac{1}{\max |H(\omega)|^2} \int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega, \quad \tau_f = \frac{1}{\max G(t)} \int_0^{\infty} G(t) dt.$$

Произведение введенных так интегральной полосы пропускания и интегральной длительности отклика фильтра удовлетворяют соотношению неопределенности

$$\Omega_f \tau_f = \frac{\pi}{2} \frac{|H(0)|^2}{\max |H(\omega)|^2} \frac{G(0)}{\max G(t)} = \frac{\pi}{2} \frac{|H(0)|^2}{\max |H(\omega)|^2}. \quad (3.4)$$

Это соотношение, подобно (1.25), следует непосредственно из определения и показывает, что чем уже полоса пропускания, тем шире длительность отклика фильтра. И наоборот.

3.3. Преобразование белого шума линейным фильтром

Представим себе, что на вход линейного фильтра подается белый шум. Согласно (3.3), на выходе появится СП, энергетический спектр которого равен

$$W_{\zeta}(\omega) = W_0 |H(\omega)|^2,$$

т.е. с точностью до постоянного множителя повторяет квадрат АЧХ фильтра. Это соотношение дает способ практической оценки АЧХ систем с помощью шумовых сигналов. Важно, что выходной СП стал не белым шумом, а окрашенным. Сигнал, который был δ -коррелирован на входе, имеет в этом случае на выходе конечную корреляционную функцию с конечным значением дисперсии. Это свойство широко используется на практике при моделировании случайных процессов с заданной корреляционной функцией. Для любой заданной корреляционной функции всегда можно подобрать соответствующий линейный фильтр, который из белого шума сделает требуемый СП.

Рассмотрим теперь вопрос: сохранил ли выходной СП информацию о входном белом шуме? Для ответа на этот вопрос найдем взаимную корреляционную функцию входного и выходного СП:

$$K_{\xi\zeta}(t_1, t_2) = \langle \delta\xi(t_1) \delta\zeta(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - t') K_{\xi}(t' - t_1) dt' = W_0 h(t_2 - t_1).$$

Оказывается, что с точностью до постоянного множителя эта кросс-корреляционная функция повторяет ИХ фильтра (рис. 13). Это дает статистический способ измерения ИХ системы: нужно лишь оценить КФ входного и выходного процессов.

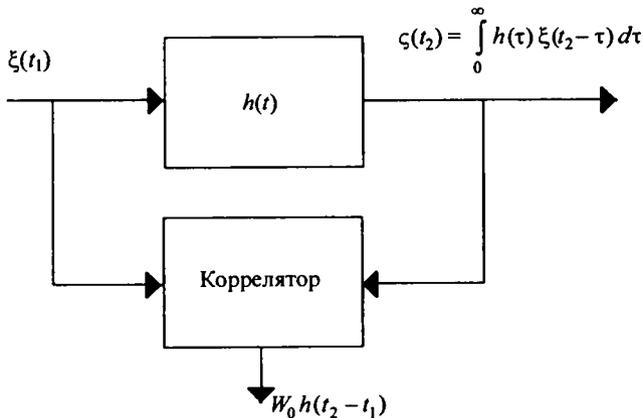


Рис. 13. Использование белого шума для измерения импульсной характеристики линейной системы

Сделаем одно важное замечание. Если на вход линейной системы с полсой пропускания Ω_f подать не белый шум, а окрашенный СП с шириной энергетического спектра $\Omega_0 \gg \Omega_f$, то эта система просто не отличит СП от белого шума. В соответствии с соотношением неопределенности это эквивалентно условию $\tau_0 \ll \tau_f$ для масштаба корреляции и длительности отклика системы. Выполнение этих условий существенно расширяет область применимости сформулированных выше способов исследования линейных систем.

3.4. Нормализация случайного процесса

Белый шум, как правило, это уже нормальный процесс. Пропускание его через линейный фильтр не изменит его нормальности. Если входной СП не является белым шумом, но выполняются условия $\Omega_0 \gg \Omega_f$ или $\tau_0 \ll \tau_f$, то линейный фильтр не отличит его от такового. По крайней мере, с точки зрения корреляции и энергетического спектра. Это дает основания надеяться, что в отношении закона распределения ситуация будет аналогична: при выполнении упомянутых условий любой процесс будет нормализоваться. Приведем доказательство этого.

Разобьем интеграл (3.2) на сумму интегралов по отрезкам длиной порядка интегрального масштаба корреляции входного процесса. Объединим все интегралы по четным отрезкам в одно слагаемое, нечетным отрезкам в другое слагаемое:

$$\zeta_1(t) = \sum_n \int_{t_0+2n\tau_0}^{t_0+2n\tau_0+\tau_0} h(t-t')\xi(t') dt',$$

$$\zeta_2(t) = \sum_m \int_{t_0+2m\tau_0+\tau_0}^{t_0+2m\tau_0+2\tau_0} h(t-t')\xi(t') dt'. \quad (3.5)$$

При выполнении условия $\tau_0 \ll \tau_f$ в каждой сумме будет достаточно много независимых и почти равнозначных слагаемых и, значит, для каждой из сумм будут выполняться условия центральной предельной теоремы (рис. 14). Каждая из сумм будет распределена по нормальному закону, но тогда и полный процесс ($\zeta(t) \equiv \zeta_1(t) + \zeta_2(t)$) будет распределен по нормальному закону. Утверждение доказано.

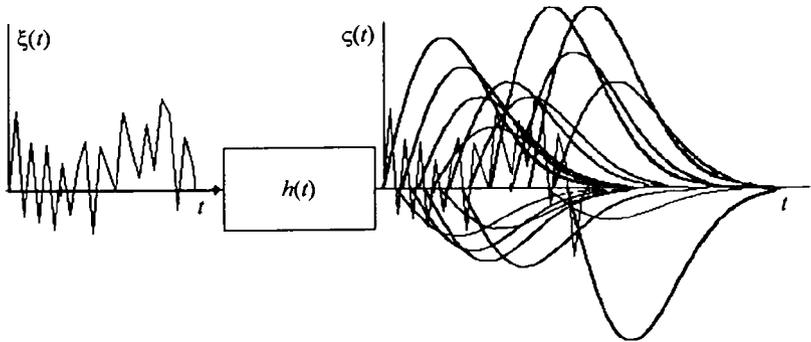


Рис. 14. К пояснению нормализации случайного процесса на выходе линейной системы

3.5. Корреляция шумов на выходе линейных систем

Представим себе, что на вход двух различных линейных фильтров подается один и тот же стационарный СП. На выходе их будут получаться два различных СП:

$$\zeta_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t') \xi(t-t') dt' \quad \text{и} \quad \zeta_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t'') \xi(t-t'') dt''.$$

Найдем их взаимную корреляцию:

$$K_{1,2}(t_1, t_2) = \langle \delta\zeta_1(t_1) \delta\zeta_2(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t') h_2(t'') K_{\xi}(t_1 - t_2 - t' + t'') dt' dt''.$$

Эта функция зависит от разности времен $\tau = t_1 - t_2$, и поэтому можно, используя спектральную теорию, записать

$$K_{1,2}(\tau) = \langle \delta\zeta_1(t_1) \delta\zeta_2(t_2) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega) H_2^*(\omega) W_{\xi}(\omega) \exp\{-i\omega\tau\} d\omega.$$

Очевидно, что если АЧХ обоих фильтров не пересекаются, то подынтегральная функция равна нулю, а это значит, что выходные процессы фильтров некоррелированы. И это в том случае, когда на входе был один и тот же случайный процесс. При выполнении условия $\tau_0 \ll \tau_f$

для каждого из фильтров это равнозначно статистической независимости СП на их выходах. Этот эффект широко используется в создании эффекта псевдостереофонии, когда один и тот же звуковой сигнал подается на фильтр низких и на фильтр высоких частот и выходные сигналы воспроизводятся разнесенными в пространстве динамиками. Возникает полное впечатление стереофонического звучания.

В случае, если АЧХ фильтров перекрываются, то взаимная корреляционная функция не равна нулю.

3.6. Равенство случайных процессов

При сравнении случайных процессов между собой, например при предельных переходах, возникает необходимость говорить о равенстве или неравенстве различных СП. Проще всего считать процессы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ совпадающими, если совпадают их ансамбли реализаций. Но тогда эти процессы не равны, а просто тождественны. К определению понятия равенства СП существуют три различных подхода. Кратко поясним их суть. Для этого введем разностный процесс: $\zeta(t) \equiv \xi_1(t) - \xi_2(t)$. Определим равенство двух процессов через равенство нулю разностного СП. При этом, конечно, будем считать, что $\langle \zeta(t) \rangle = 0$, но одного этого мало.

1. Говорят, что процесс $\zeta(t)$ равен нулю «почти наверное», если исчезающе мало число реализаций этого процесса, отличных от нуля. Иначе это записывается как

$$P\{\zeta(t) = 0\} = 1.$$

2. Говорят, что процесс $\zeta(t)$ равен нулю по вероятности, если для любого сколь угодно малого ε найдется такое $\delta \leq 1$, что выполняется неравенство

$$P\{|\zeta(t)| \geq \varepsilon\} \leq \delta.$$

3. Говорят, что процесс $\zeta(t)$ равен нулю в среднеквадратическом смысле, если его второй начальный момент может быть сделан близким к нулю с любой заданной точностью:

$$\langle |\zeta(t)|^2 \rangle \rightarrow 0.$$

Первое понятие используется редко. Третье легко применимо на практике. Причем его выполнение влечет выполнение равенства по вероятности. В основе его лежит использование так называемого неравенства Чебышева, имеющего место для любых СП:

$$P\{|\zeta(t) - \langle \zeta(t) \rangle| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma_\zeta^2}{\varepsilon^2}.$$

Здесь $\langle \zeta(t) \rangle$, σ_ζ^2 – среднее значение и дисперсия процесса $\zeta(t)$. Действительно, при выполнении неравенства Чебышева достаточно выбрать

$$\delta \equiv \frac{\sigma_\zeta^2}{\varepsilon^2},$$

и мы имеем выполнение равенства по вероятности.

Справедливость самого неравенства Чебышева следует из цепочки достаточно очевидных неравенств:

$$\begin{aligned} \sigma_\zeta^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\zeta - \langle \zeta \rangle]^2 f(\zeta) d\zeta \geq \int_{|\zeta - \langle \zeta \rangle| \geq \varepsilon} [\zeta - \langle \zeta \rangle]^2 f(\zeta) d\zeta \geq \\ &\geq \varepsilon^2 \int_{|\zeta - \langle \zeta \rangle| \geq \varepsilon} f(\zeta) d\zeta = \varepsilon^2 P\{|\zeta - \langle \zeta \rangle| \geq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Крайние элементы этой цепочки неравенств и дают неравенство Чебышева.

В дальнейшем мы будем использовать понятие равенства только в среднеквадратическом смысле.

3.7. Условие непрерывности случайных процессов

Будем говорить, что случайный процесс $\xi(t)$ непрерывен в среднеквадратическом смысле (с.к.с.), если выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle [\xi(t + \Delta t) - \xi(t)]^2 \rangle = 0. \quad (3.6)$$

Определим необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять СП, чтобы выполнялось (3.6). Пусть для простоты $\langle \xi(t) \rangle = 0$. Распишем явно выражение, стоящее под знаком предела в (3.6):

$$\langle [\xi(t + \Delta t) - \xi(t)]^2 \rangle = \sigma^2(t + \Delta t) + \sigma^2(t) - 2K(t, t + \Delta t).$$

Из этого соотношения видно, что если выполняется (3.6), то должно выполняться условие

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} K(t, t + \Delta t) = K(t, t) = \sigma^2(t). \quad (3.7)$$

Это условие непрерывности КФ при совпадающих аргументах. Значит, это есть необходимое условие непрерывности в с.к.с. С другой стороны, если выполняется (3.7), то автоматически выполняется (3.8). Значит, условие (3.7) есть ещё и достаточное условие непрерывности в с.к.с.

Для стационарных СП необходимое и достаточное условие непрерывности процесса в с.к.с. записывается как условие непрерывности КФ при нулевом аргументе:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} K(\Delta t) = K(0) = \sigma^2. \quad (3.8)$$

3.8. Условия дифференцируемости случайных процессов

Говорят, что СП дифференцируем в среднеквадратическом смысле (с.к.с.), если выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \left[\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} - \xi'(t) \right]^2 \right\rangle = 0. \quad (3.9)$$

Случайный процесс $\xi'(t)$ при этом называется производной для процесса $\xi(t)$.

Для выяснения условий, необходимых и достаточных для дифференцируемости СП, построим вспомогательный процесс вида

$$\Delta r(t, \Delta t) \equiv \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t}. \quad (3.10)$$

Очевидно, что условие дифференцируемости (3.9) есть условие непрерывности процесса (3.10) по переменной Δt при $\Delta t \rightarrow 0$. Таким образом, с учетом результата предыдущего пункта необходимым и достаточным условием дифференцируемости СП $\xi(t)$ является условие непрерывности корреляционной функции вспомогательного процесса

$$K_{\Delta r}(\Delta t_1, \Delta t_2) \equiv \langle \Delta r(t, \Delta t_1) \Delta r(t, \Delta t_2) \rangle, \quad (3.11)$$

т.е. требование $\lim_{\substack{\Delta t_1 \rightarrow 0 \\ \Delta t_2 \rightarrow 0}} K_{\Delta r}(\Delta t_1, \Delta t_2) < \infty$.

Если расписать (3.11) в явном виде, то имеем

$$K_{\Delta r}(\Delta t_1, \Delta t_2) = \frac{K(t + \Delta t_1, t + \Delta t_2) - K(t + \Delta t_1, t) + K(t, t) - K(t, t + \Delta t_2)}{\Delta t_1 \Delta t_2}.$$

Условием существования предела от этой функции является непрерывность и существование самой корреляционной функции, а также её производных до второго порядка включительно

$$K(t_1, t_2), \frac{\partial}{\partial t_1} K(t_1, t_2), \frac{\partial}{\partial t_2} K(t_1, t_2), \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K(t_1, t_2)$$

при совпадающих аргументах $t_1 = t_2$. Это есть необходимые и достаточные условия дифференцируемости СП в с.к.с.

Для стационарных СП условия дифференцируемости сводятся к условиям существования конечных значений: $K(\tau=0)$, $K'(\tau=0)$, $K''(\tau=0)$.

3.9. Свойства производной случайного процесса

Случайный процесс $\xi'(t)$, удовлетворяющий условию (3.9), является производной исходного процесса $\xi(t)$. Установим его основные свойства.

1. Последовательность операций усреднения и дифференцирования можно менять местами:

$$\langle \xi'(t) \rangle = \frac{d}{dt} \langle \xi(t) \rangle. \quad (3.12)$$

Для доказательства справедливости этого утверждения образуем процесс

$$\eta(t) = \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} - \xi'(t)$$

и запишем для него очевидное неравенство

$$\sigma_\eta^2 = \langle \eta^2(t) \rangle - \langle \eta(t) \rangle^2 \geq 0,$$

или, что то же, $\langle \eta^2(t) \rangle \geq \langle \eta(t) \rangle^2$.

По условию дифференцируемости процесса (3.9) левая часть последнего неравенства в пределе обращается в нуль, и мы имеем

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \left[\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} - \xi'(t) \right]^2 \right\rangle = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\left\langle \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} - \xi'(t) \right\rangle^2 \right] = \left[\frac{d \langle \xi(t) \rangle}{dt} - \langle \xi'(t) \rangle \right]^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что выражение в квадратных скобках равно нулю, а это есть доказываемое равенство (3.12).

2. Корреляционная функция процесса и его производной вычисляется путем дифференцирования КФ самого процесса:

$$\langle \xi(t_1)\xi'(t_2) \rangle = \frac{\partial}{\partial t_2} K(t_1, t_2), \quad \langle \xi'(t_1)\xi'(t_2) \rangle = \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} K(t_1, t_2).$$

Получается это свойство в результате обобщения первого свойства.

Для стационарных процессов перечисленные свойства упрощаются:

$$\langle \xi'(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t_1)\xi'(t_2) \rangle = \frac{d}{d\tau} K(\tau), \quad \langle \xi'(t_1)\xi(t_2) \rangle = -\frac{d}{d\tau} K(\tau),$$

$$\langle \xi'(t_1)\xi'(t_2) \rangle = -\frac{d^2}{d\tau^2} K(\tau), \quad \tau = t_2 - t_1.$$

3. Случайный процесс и его производная в совпадающие моменты времени некоррелированы:

$$\langle \xi(t)\xi'(t) \rangle = K'(0) = 0.$$

Это следует из того, что при нулевом разное корреляция самого процесса максимальна. Из этого свойства вытекает, например, что фаза случайного сигнала и его частота некоррелированы в совпадающие моменты времени.

4. Энергетический спектр производной случайного процесса связан с энергетическим спектром исходного процесса соотношением

$$W_{\xi'}(\omega) = \omega^2 W_{\xi}(\omega).$$

Получается оно из свойства 2 с использованием теоремы Винера – Хинчина.

5. Для того чтобы СП был дифференцируемым, необходимо, чтобы энергетический спектр исходного процесса убывал быстрее, чем

$$W_{\xi}(\omega) < \omega^3 \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty.$$

Следует это свойство из требования конечности дисперсии производной и сходимости несобственного интеграла:

$$\sigma_{\xi'}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 W_{\xi}(\omega) d\omega.$$

6. При дифференцировании стационарность СП не нарушается.
 7. При дифференцировании нормальность СП не нарушается.
- Доказательство свойств 6 и 7 элементарно.

3.10. Контрольные вопросы

- Как изменяется спектр случайного процесса при линейной фильтрации?
- Что такое «окрашенный» шум?
- Как можно использовать случайный процесс для измерения характеристик линейных систем?
- Сформулировать условие нормализации случайного процесса на выходе линейной системы.
- Сформулировать необходимые и достаточные условия непрерывности (дифференцируемости) случайного процесса в среднеквадратическом смысле.
- Как вычислить корреляционную функцию производной случайного процесса?
- Как вычисляется дисперсия производной случайного процесса?

Глава 4

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Выделение информации из переносящих ее сигналов невозможно без использования нелинейных преобразований. В простейшем случае это может быть простая демодуляция сигналов. Так или иначе нелинейные преобразования сигналов и процессов являются типичной операцией в радиофизике и нуждаются в отдельном рассмотрении. Конечно, любое нелинейное преобразование в малом диапазоне изменения сигналов может быть линеаризовано, т.е. заменено близким линейным преобразованием. Однако в общем случае необходимо либо слишком большое множество аппроксимирующих линейных функций, либо это просто невозможно. Например, путем любой комбинации линейных преобразований нельзя описать комбинационное расширение спектра сигнала при нелинейном преобразовании сигнала.

В общем случае теория нелинейных преобразований не имеет таких простых представлений, как это делается для линейных преобразований. Более или менее законченной является теория безынерционных преобразований. Этим мы и ограничимся.

4.1. Корреляционная функция на выходе плавных нелинейностей. Двусторонний квадратичный детектор

Пусть на вход некоторого нелинейного элемента поступает стационарный СП $\xi(t)$. Нелинейность элемента описывается плавной детерминированной функцией

$$y = g(x). \quad (4.1)$$

Безынерционность преобразования предполагает, что выходной сигнал появляется на выходе элемента сразу без какой-либо задержки, как

только появился входной сигнал. На выходе такого идеализированного элемента мы будем иметь СП, который получается как

$$\zeta(t) = g(\xi(t)).$$

Рассчитать любые статистические моменты выходного процесса относительно просто, если известен закон распределения входного случайного процесса, например:

$$\langle \zeta(t) \rangle = \langle g(\xi(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) f(\xi) d\xi; \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \langle \zeta(t_1) \zeta(t_2) \rangle &= \langle g(\xi(t_1)) g(\xi(t_2)) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1) g(\xi_2) f(\xi_1, \xi_2; \tau = t_1 - t_2) d\xi_1 d\xi_2 \equiv m_{\zeta}(\tau). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Выходной СП является стационарным. Вычисление моментов требует лишь аналитического или численного вычисления интегралов (4.2) и (4.3). На практике этот закон распределения известен не всегда. Возникает вопрос: нельзя ли оценить, например, корреляционную функцию (КФ) выходного СП, если известна КФ входного процесса?

Для ответа на поставленный вопрос попытаемся представить $m_{\zeta}(\tau)$ в виде ряда по степеням КФ входного СП:

$$m_{\zeta}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} K_{\xi}^n(\tau). \quad (4.4)$$

Чтобы получить явное выражение для коэффициентов этого разложения, проведем формальное разложение двумерной плотности распределения в ряд Тейлора:

$$f(\xi_1, \xi_2; \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} K_{\xi}^n(\tau) \left. \frac{\partial^n}{\partial K_{\xi}(\tau)^n} \right|_{K_{\xi}=0} f(\xi_1, \xi_2; \tau). \quad (4.5)$$

Явное выражение плотности распределения через КФ получается с использованием кумулянтного разложения для ХФ (см. п. 1.8):

$$f(\xi_1, \xi_2; \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \varphi(u_1, u_2; \tau) \exp\{-iu_1 \xi_1 - iu_2 \xi_2\} du_1 du_2; \quad (4.6)$$

$$\varphi(u_1, u_2; \tau) = \exp\left\{-iu_1 \langle \xi_1 \rangle - iu_2 \langle \xi_2 \rangle - \frac{1}{2} [\sigma^2 u_1^2 + \sigma^2 u_2^2 + 2u_1 u_2 K_{\xi}(\tau)] + \dots\right\}. \quad (4.7)$$

Простая подстановка (4.6) и (4.7) в (4.5) и (4.3) с выполнением интегрирования по частям приводит к представлению (4.4), в котором коэффициенты разложения имеют вид

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n g(\xi_1)}{d\xi_1^n} \frac{d^n g(\xi_2)}{d\xi_2^n} f(\xi_1, \xi_2; \tau) d\xi_1 d\xi_2 \equiv \langle g^{(n)}(\xi_1) g^{(n)}(\xi_2) \rangle \quad (4.8)$$

при условии, что $K_\xi(\tau) = 0$. Здесь $g^{(n)}(\xi)$ означает n -кратную производную.

Сразу заметим, что для нормальных СП условие $K_\xi(\tau) = 0$ равнозначно статистической независимости, и тогда (4.8) можно записать как

$$a_n = \langle g^{(n)}(\xi_1) \rangle \langle g^{(n)}(\xi_2) \rangle = \langle g^{(n)}(\xi) \rangle^2. \quad (4.9)$$

Таким образом, окончательно можно записать, что

$$m_\zeta(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle g^{(n)}(\xi) \rangle^2}{n!} K_\xi^n(\tau).$$

Выделение здесь нулевого члена разложения приводит к явному выражению для КФ выходного процесса:

$$K_\zeta(\tau) = m_\zeta(\tau) - \langle g(\xi) \rangle^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g^{(n)}(\xi) \rangle^2}{n!} K_\xi^n(\tau). \quad (4.10)$$

Рассмотрим в качестве примера, как изменится КФ случайного процесса после прохождения двустороннего квадратичного детектора, осуществляющего нелинейное преобразование вида

$$y = g(x) = ax^2. \quad (4.11)$$

Простое дифференцирование этой зависимости дает

$$y' = 2ax, \quad y'' = 2a, \quad y''' = 0, \dots$$

В результате применения формулы (4.10) имеем

$$K_\zeta(\tau) = 2[aK_\xi(\tau)]^2. \quad (4.12)$$

Эта формула для КФ как бы повторяет вид самой нелинейности, но в общем случае это не так.

Формула (4.10) достаточно универсальна и особенно эффективна в случае, когда вид нелинейности (4.1) удается аппроксимировать поли-

номом. При этом ряд (4.10) обрывается и удается получить не ряд, а конечную сумму.

4.2. Корреляционная функция на выходе кусочно-ломаных нелинейностей

В случае, когда нелинейность не описывается плавной кривой, формула (4.10) малоэффективна, поскольку ряд не удается оборвать. Для такого случая разработан специальный метод – метод дифференциального уравнения, который для нормальных входных СП часто дает формулы конечного вида. Рассмотрим его суть.

Рассмотрим выражение (4.3) с учетом (4.6). В случае стационарного нормального СП прямое вычисление производной показывает, что

$$\frac{d^n}{dK_\xi^n} m_2(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u_1, u_2; \tau) \{iu_1 iu_2\}^n \hat{g}(u_1) \hat{g}(u_2) du_1 du_2,$$

где через $\hat{g}(u) = \iint g(x) \exp\{iux\} dx$

обозначена трансформанта Фурье от функции (4.1). Используя далее свойства преобразований Фурье относительно производной и равенство Парсеваля, можно записать простую окончательную формулу

$$\frac{d^n}{dK_\xi^n} m_2(\tau) = \langle g^{(n)}(\xi(t_1)) g^{(n)}(\xi(t_2)) \rangle.$$

С учетом того, что $K_\zeta(\tau) = m_\zeta(\tau) - \langle g(\xi) \rangle^2$, для корреляционной функции выходного СП можно записать такую же формулу:

$$\frac{d^n}{dK_\xi^n} K_\zeta(\tau) = \langle g^{(n)}(\xi(t_1)) g^{(n)}(\xi(t_2)) \rangle. \quad (4.13)$$

По внешнему виду она напоминает (4.8), но получена без предположения $K_\xi(\tau) = 0$. Важно подчеркнуть, что при ее получении использовано только предположение о нормальности входного СП.

Значения n и τ в (4.13) произвольные. Если выражение, стоящее в правой части, известно или может быть вычислено, то записанную формулу можно рассматривать как дифференциальное уравнение для КФ выходного процесса, представляющую собой функцию от КФ вход-

ного процесса. Для однозначности решения уравнения (4.13) необходимо дополнить его начальными условиями при $K_{\xi} = 0$. В качестве таких можно взять очевидные из (4.13) условия

$$\frac{d^p}{dK_{\xi}^p} K_{\zeta}(\tau) = \langle g^{(p)}(\xi(t)) \rangle^2 \text{ при } K_{\xi} = 0 \text{ и } p = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.14)$$

Важно отметить, что, во-первых, для выходного СП сама функция $K_{\zeta}(\tau) = 0$ при $K_{\xi} = 0$, а, во-вторых, условие $K_{\xi}(\tau) = 0$ равнозначно взятию предела $\tau \rightarrow \infty$.

В качестве проверки работоспособности сформулированного метода рассмотрим случай с двусторонним квадратичным детектором. Согласно (4.11), мы очевидным образом имеем, что

$$\frac{d^2}{dK_{\xi}^2} K_{\zeta}(\tau) = (2a)^2. \quad (4.15)$$

Причем это имеет место при произвольном τ . В качестве начальных условий согласно (4.14) возьмем

$$\frac{d}{dK_{\xi}} K_{\zeta}(\tau) = 0, \quad K_{\zeta}(\tau) = 0$$

при $K_{\xi} = 0$, т.е. при $\tau \rightarrow \infty$. Как нетрудно проверить, решением (4.15) действительно является функция (4.12). Работоспособность метода подтверждена на примере.

Высокая эффективность метода для кусочно-ломаных нелинейностей будет ясна из последующих примеров.

4.3. Корреляционная функция на выходе предельного ограничителя

Рассмотрим интересный с точки зрения теории и важный с точки зрения практики вид нелинейности, называемой предельным ограничителем. Предельным ограничителем называется нелинейное устройство, реализующее преобразование вида

$$y = a \cdot \text{sgn}(x) = a(2\chi(x) - 1), \quad (4.16)$$

где $\chi(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда и a – константа. При таком преобразовании фактически сохраняется только знак входного сигнала

(рис. 15), а все остальное отбрасывается. Реализуется эта операция, если сигнал сначала подвергается очень большому усилению и затем ограничивается по амплитуде величиной a . Такой же результат получается на выходе двухрядного АЦП. В зарубежной литературе преобразование вида (4.16) известно как операция клепирования сигнала и широко используется в канадской системе радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой (РСДБ).

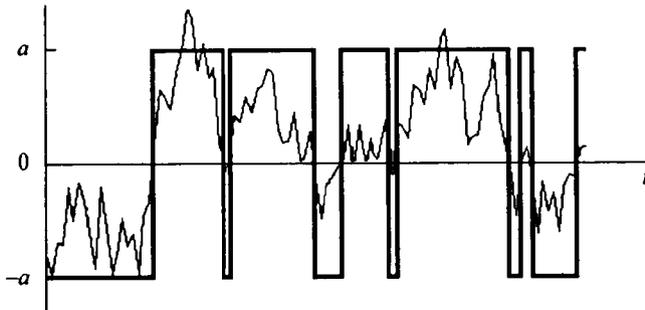


Рис. 15. Преобразование сигнала предельным ограничителем

Будем считать, что на вход нелинейного устройства вида (4.16) подается центрированный нормальный СП с известной КФ $K_{\xi}(\tau)$. Задача состоит в нахождении КФ на выходе предельного ограничителя. Для решения задачи воспользуемся дифференциальным уравнением (4.13) и начальными условиями (4.14). Предварительно проведем дифференциальный анализ нелинейности

$$y' = 2a \cdot \delta(x).$$

Появление $\delta(x)$ -функции здесь существенно для вычисления правой части в (4.13). В результате, ограничившись значением $n = 1$, имеем

$$\frac{d}{dK_{\xi}} K_{\xi}(\tau) = (2a)^2 \langle \delta(\xi(t_1)) \delta(\xi(t_2)) \rangle = (2a)^2 f(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0; \tau).$$

Вид двумерной плотности нормального распределения приводился в п. 2.1.4. С учетом его можно записать, что

$$\frac{d}{dK_{\xi}} K_{\xi} = \frac{(2a)^2}{2\pi\sqrt{\sigma^4 - K_{\xi}^2}}.$$

В качестве начального условия возьмем $K_\zeta = 0$ при $K_\xi = 0$.

Формальное интегрирование полученного уравнения приводит к корреляционной функции

$$K_\zeta(\tau) = \frac{2a^2}{\pi} \arcsin\left(\frac{K_\xi(\tau)}{\sigma^2}\right).$$

Видно, что несмотря на существенное упрощение выходного сигнала его корреляционная функция сохранила всю информацию о корреляционных связях входного процесса. Дисперсия выходного процесса равна $\sigma_\zeta^2 = a^2$.

Обратная связь имеет вид

$$K_\xi(\tau) = \sigma^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi K_\zeta(\tau)}{2 a^2}\right).$$

Эта формула известна как формула Ван-Флека и позволяет восстановить вид корреляционной функции входного процесса на основе анализа клепированного сигнала. Эта формула показывает, что все корреляционные связи нормальных случайных процессов содержатся в их переходах через среднее значение, в нашем случае – через нуль (!).

4.4. Корреляционная функция на выходе одностороннего линейного детектора

Односторонним линейным детектором называется устройство, реализующее преобразование вида

$$y = a \cdot x \cdot \chi(x). \quad (4.17)$$

Дифференциальный анализ этой нелинейности дает

$$y' = a \cdot \chi(x) + a \cdot x \cdot \delta(x) = a \cdot \chi(x), \quad y'' = a \cdot \delta(x).$$

Появление δ -функции со второй производной указывает на то, что в методе дифференциального уравнения следует выбрать $n = 2$. При этом для центрированного нормального СП в соответствии с (4.13) можно записать дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{dK_\xi^2} K_\zeta = a^2 f(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0; \tau) = \frac{a^2}{2\pi\sqrt{\sigma^4 - K_\xi^2}}$$

с начальными условиями при $K_{\xi} = 0$

$$\frac{d}{dK_{\xi}} K_{\zeta} = a^2 \langle \chi(\xi) \rangle^2 = \left(\frac{a}{2} \right)^2, \quad K_{\zeta} = 0.$$

Последовательное интегрирование полученного дифференциального уравнения приводит к решению вида

$$K_{\zeta}(\tau) = \left(\frac{a}{2} \right)^2 K_{\xi}(\tau) + \frac{a^2}{2\pi} \left\{ K_{\xi}(\tau) \cdot \arcsin \left(\frac{K_{\xi}(\tau)}{\sigma^2} \right) + \sqrt{\sigma^4 - K_{\xi}^2(\tau) - \sigma^2} \right\}.$$

Получилась несколько более громоздкая формула, чем при клепировании сигнала, но все-таки конечная. Попытка применить общий подход с разложением по степеням корреляционной функции входного процесса (4.10) приводит к бесконечному ряду, суммирование которого затруднительно.

Полученная формула позволяет просто рассчитать дисперсию выходного процесса

$$\sigma_{\zeta}^2 = K_{\zeta}(\tau = 0) = \frac{a^2 \sigma^2}{2\pi} (\pi - 1) \approx 0.34 a^2 \sigma^2.$$

Получилось, что одностороннее линейное детектирование уменьшает дисперсию СП приблизительно в три раза по сравнению с соответствующим линейным преобразованием.

4.5. Корреляционная функция на выходе двустороннего линейного детектора

Двусторонним линейным детектором называется устройство, реализующее преобразование вида

$$y = a \cdot x \cdot \operatorname{sgn}(x).$$

Дифференциальный анализ этой нелинейности дает

$$y' = a \cdot \operatorname{sgn}(x) + 2a \cdot x \cdot \delta(x) = a \cdot \operatorname{sgn}(x), \quad y'' = 2a \cdot \delta(x).$$

Для использования метода дифференциального уравнения для расчета КФ выходного процесса необходимо выбрать $n = 2$. Для центрированного нормального СП при этом в соответствие с (4.13) можно записать дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2}{dK_\xi^2} K_\zeta = 4a^2 f(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0; \tau) = \frac{2a^2}{\pi \sqrt{\sigma^4 - K_\xi^2}}$$

с начальными условиями при $K_\xi = 0$

$$\frac{d}{dK_\xi} K_\zeta = a^2 \langle \text{sgn}(\xi) \rangle^2 = 0, \quad K_\zeta = 0.$$

Интегрирование полученного дифференциального уравнения приводит к решению вида

$$K_\zeta(\tau) = \frac{2a^2}{\pi} \left\{ K_\xi(\tau) \cdot \arcsin\left(\frac{K_\xi(\tau)}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\sigma^4 - K_\xi^2(\tau)} - \sigma^2 \right\}.$$

Соответствующая дисперсия флуктуаций выходного процесса оценивается как

$$\sigma_\zeta^2 = K_\zeta(\tau=0) = \frac{a^2 \sigma^2}{\pi} (\pi - 2) \approx 0.36 a^2 \sigma^2.$$

Сравнивая с результатом предыдущего раздела, видим, что дисперсия немного увеличилась по сравнению со случаем одностороннего линейного детектора.

4.6. Энергетический спектр на выходе нелинейного элемента

Как мы видели, нелинейные преобразования существенно изменяют корреляционные связи СП. Возникает вопрос: что при этом происходит со спектральными свойствами СП? Нам хорошо известно, что на выходе нелинейных устройств обычно появляются комбинационные частоты. Например, монохроматический сигнал вида

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t)$$

после прохождения квадратичного детектора (4.11) принимает вид

$$y(t) = aA_0^2 \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} aA_0^2 + \frac{1}{2} aA_0^2 \cos(2\omega_0 t),$$

т.е. приобретает спектральные составляющие на трех частотах: $\omega = 0$ и $\omega = \pm 2\omega_0$. Рассмотрим, что происходит в этом отношении с СП.

Основой для анализа энергетического спектра на выходе нелинейного элемента является разложение (4.10). Согласно теореме Винера – Хинчина (1.19), имеем

$$W_{\zeta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\zeta}(\tau) \exp\{i\omega\tau\} d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g^{(n)}(\xi) \rangle^2}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}^n(\tau) \exp\{i\omega\tau\} d\tau,$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} W_{\zeta}(\omega) = & \langle g'(\xi) \rangle^2 W_{\xi}(\omega) + \frac{\langle g''(\xi) \rangle^2}{2!} W_{\xi}(\omega) * W_{\xi}(\omega) + \\ & + \frac{\langle g'''(\xi) \rangle^2}{3!} W_{\xi}(\omega) * W_{\xi}(\omega) * W_{\xi}(\omega) + \dots \end{aligned} \quad (4.18)$$

Здесь знаком «*» мы обозначили операцию свертки:

$$W_{\xi}(\omega) * W_{\xi}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(\omega - \omega') W_{\xi}(\omega') d\omega'. \quad (4.19)$$

Для простоты будем предполагать, что входной процесс – это узкополосный стационарный СП, т.е. процесс, энергетический спектр которого отличен от нуля в относительно узкой полосе:

$$W_{\xi}(\omega) \neq 0 \text{ при } -\Delta \leq (\omega \pm \omega_0) \leq \Delta, \quad \Delta \ll \omega_0. \quad (4.20)$$

Установим частотную область, в которой для такого входного процесса свертка (4.19) может быть отлична от нуля. Согласно предположению (4.20), подынтегральная функция в (4.18) отлична от нуля при одновременном выполнении системы неравенств

$$\begin{cases} -\Delta \leq (\omega' \pm \omega_0) \leq \Delta; \\ -\Delta \leq (\omega - \omega' \pm \omega_0) \leq \Delta. \end{cases}$$

В развернутом виде эти неравенства эквивалентны выполнению семейства из четырех систем неравенств

$$\begin{aligned} \begin{cases} -\Delta \leq (\omega' + \omega_0) \leq \Delta, \\ -\Delta \leq (\omega - \omega' - \omega_0) \leq \Delta; \end{cases} & \begin{cases} -\Delta \leq (\omega' - \omega_0) \leq \Delta, \\ -\Delta \leq (\omega - \omega' + \omega_0) \leq \Delta; \end{cases} \\ \begin{cases} -\Delta \leq (\omega' - \omega_0) \leq \Delta, \\ -\Delta \leq (\omega - \omega' - \omega_0) \leq \Delta; \end{cases} & \begin{cases} -\Delta \leq (\omega' + \omega_0) \leq \Delta, \\ -\Delta \leq (\omega - \omega' + \omega_0) \leq \Delta. \end{cases} \end{aligned}$$

Путем почленного сложения исключим из этих неравенств переменную интегрирования ω' :

$$-2\Delta \leq \omega \leq 2\Delta, \quad -2\Delta \leq (\omega \pm 2\omega_0) \leq 2\Delta.$$

Полученные неравенства определяют частотные области, в пределах которых может быть отличен от нуля результат вычисления свертки (4.19). Физически это означает, что у выходного СП появились спектральные составляющие вблизи частот $\omega = 0$ и $\omega = \pm 2\omega_0$. Изначально этих спектральных составляющих не было. При этом сам энергетический спектр в два раза расширился. Именно так происходит для двустороннего квадратичного детектора, поскольку для него только одно слабое в (4.18) отлично от нуля.

При аналогичном рассмотрении следующего члена в разложении (4.18) мы получим появление составляющих вблизи частот $\pm\omega_0$ и $\pm 3\omega_0$, причем с утроенной шириной занимаемой полосы. В общем случае бесконечного числа слагаемых в (4.18) энергетический спектр выходного СП бесконечно расширяется: появляются все комбинационные частоты $\pm m\omega_0$ вместе с соответственно расширяющимся окружением (рис. 16).

Общий вывод: нелинейные устройства вызывают расширение энергетического спектра. В этом их главное отличие от линейных устройств, которые только сужают спектр.

Заметим, что появление спектральных составляющих вблизи частоты $\omega = 0$ обычно используется в радиофизике для демодуляции сигналов (извлечения информации), а появление составляющих вблизи комбинационных частот $\pm m\omega_0$ — для модуляции сигналов (внедрения информации в сигналы). Таким образом, нелинейные преобразования — неотъемлемая часть входных и выходных радиофизических устройств.

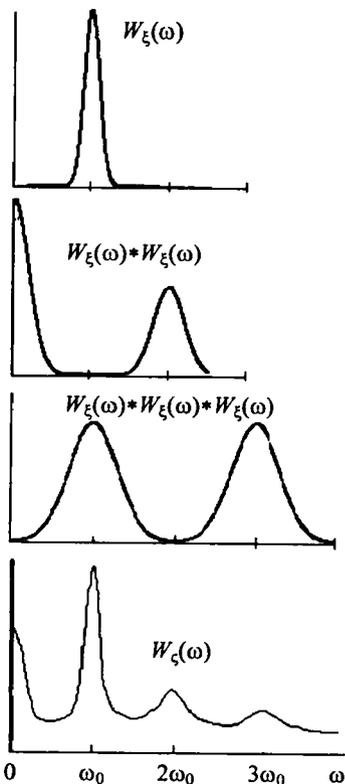


Рис. 16. Энергетический спектр на выходе нелинейного устрой-

4.7. Распределение процесса на выходе нелинейного элемента

4.7.1. Взаимнооднозначное преобразование

Изменение корреляционных связей и спектров СП нелинейными элементами указывает на то, что на выходе нелинейных устройств должны изменяться их законы распределения. Рассмотрим существующие подходы для вычисления законов распределения выходных СП: $\zeta(t) = g(\xi(t))$. Начнем со случая, когда нелинейное преобразование (4.1) является взаимнооднозначным. В этом случае вероятность распределения входного процесса в малом диапазоне вблизи заданного значения равна вероятности распределения выходного процесса в малом диапазоне вблизи соответствующего выходного значения СП:

$$\Delta P = f_{\xi}(\xi) \Delta \xi = f_{\zeta}(\zeta) \Delta \zeta.$$

Отсюда следует, что

$$f_{\zeta}(\zeta) = f_{\xi}(\xi) \cdot \left| \frac{d\xi}{d\zeta} \right|. \quad (4.21)$$

Знак модуля введен здесь с учетом требования положительности плотности распределения. Для практического использования формулы (4.21) необходимо знать функцию $x = g^{-1}(y)$, осуществляющую обратное нелинейное преобразование:

$$\xi = g^{-1}(\zeta).$$

В многомерном случае, когда на входе действует векторный СП $\underline{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ и на выходе получается векторный процесс $\underline{\zeta} = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}$ той же размерности, аналогом преобразования (4.21) является соотношение

$$f_{\zeta}(\underline{\zeta}) = f_{\xi}(\underline{\xi}) \cdot |J_{\xi/\zeta}|. \quad (4.22)$$

Здесь $J_{\xi/\zeta} = \det \left\{ \frac{\partial \xi_i}{\partial \zeta_j} \right\}$ – якобиан соответствующей матрицы перехода, связанной с векторной функцией обратного преобразования $\underline{x} = g^{-1}(\underline{y})$. Заметим, что соотношения (4.21) и (4.22) широко используются не

только для анализа, но и для синтеза СП с заданным законом распределения.

В качестве примера рассмотрим нелинейное преобразование, осуществляемое логарифмическим усилителем:

$$y = \ln \{x\}.$$

Для него обратная функция определяется как

$$x = g^{-1}(y) = \exp \{y\}.$$

В соответствии с (4.21) закон распределения выходного СП находится с помощью формулы

$$f_{\zeta}(\zeta) = f_{\xi}(\exp \{\zeta\}) \cdot \exp \{\zeta\}.$$

4.7.2. Двусторонний детектор

Двусторонний квадратичный детектор описывается преобразованием (4.11), которому соответствует неоднозначное обратное преобразование. В этом случае следует говорить о нескольких (в нашем случае – двух) ветвях обратной функции $x_j = g_j^{-1}(y)$. Обобщением (4.22) является очевидная формула

$$f_{\zeta}(\zeta) = \sum_j f_{\xi}(\xi_j) \cdot \left| \frac{d\xi_j}{d\zeta} \right|.$$

Для двустороннего квадратичного детектора (4.11) соответствующими ветвями обратного преобразования являются функции

$$x_1 = \sqrt{\frac{y}{a}} \quad \text{и} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{y}{a}}.$$

Так что распределение выходного процесса задается формулой

$$f_{\zeta}(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{a\zeta}} \left[f_{\xi} \left(\sqrt{\frac{\zeta}{a}} \right) + f_{\xi} \left(-\sqrt{\frac{\zeta}{a}} \right) \right] \chi(\zeta).$$

Если записать это распределение для централизованного нормального случайного процесса на входе, то на выходе мы имеем плотность распределения вида

$$f_{\zeta}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a\zeta\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{\zeta}{2a\sigma^2} \right\} \chi(\zeta).$$

4.7.3. Односторонний детектор

Односторонний квадратичный детектор описывается преобразованием вида

$$y = g(x) = ax^2\chi(x).$$

Его особенностью является то, что все отрицательные значения входного процесса соответствуют одному значению выходного процесса, а именно нулю. Причем это значение не случайное, а вполне детерминированное, правда, возникающее с определенной вероятностью

$$P(\zeta = 0) = P(\xi \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f(\xi) d\xi.$$

В целом выходной процесс является состоящим из суммы непрерывно и дискретно распределенных процессов. Его распределение устанавливается формулой

$$f_{\zeta}(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{a\zeta}} f_{\xi}\left(\sqrt{\frac{\zeta}{a}}\right)\chi(\zeta) + P(\zeta = 0)\delta(\zeta).$$

Если записать её для централизованного нормального случайного процесса на входе, то на выходе мы имеем плотность распределения вида

$$f_{\zeta}(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi a\zeta\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{\zeta}{2a\sigma^2}\right\}\chi(\zeta) + \frac{1}{2}\delta(\zeta).$$

Обобщение на случай составных процессов с множеством дискретных выходных значений дается суммированием соответствующих δ -функций. Например, распределение СП на выходе АЦП с N различными дискретными уровнями $\{y_n\}$ задается формулой

$$f_{\zeta}(\zeta) = \sum_{n=1}^N P_n \delta(\zeta - y_n),$$

где вероятности получения соответствующих уровней сигнала

$$P_n = P(y_{n-1} \leq \xi \leq y_n) = \int_{y_{n-1}}^{y_n} f(\xi) d\xi.$$

4.8. Контрольные вопросы

- Записать преобразование корреляционной функции на выходе нелинейного квадратичного детектора.
- Что описывает формула Ван-Флека?
- Как изменяется энергетический спектр случайного процесса при нелинейном преобразовании.
- Записать закон распределения случайного процесса при взаимно однозначном нелинейном преобразовании.
- Записать закон распределения случайного процесса при не взаимно однозначном нелинейном преобразовании.
- Записать закон распределения случайного процесса при его преобразовании в дискретный процесс.

Глава 5

УЗКОПОЛОСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Среди многих случайных процессов особое место занимают так называемые узкополосные СП. Прежде всего это происходит потому, что современная радиофизика сама является «узкополосной». Узкополосность СП сопряжена с целым рядом свойственных им особенностей, рассмотрению которых и посвящена данная глава.

5.1. Понятия узкополосных и квазигармонических сигналов и случайных процессов

Узкополосность сигнала обычно ассоциируется с понятием квазигармоничности. Рассмотрим связь этих понятий.

Как известно, гармоническим процессом называется сигнал, который описывается как

$$x(t) = A_0 \cos\{\varphi_0 - \omega_0 t\}.$$

Здесь величины A_0 , φ_0 и ω_0 называются соответственно амплитудой, начальной фазой (далее – просто фазой) и частотой сигнала. Если амплитуда и фаза сигнала пусть медленно, но изменяются во времени, то такой сигнал называется квазигармоническим:

$$x(t) = A(t) \cos\{\varphi(t) - \omega_0 t\}. \quad (5.1)$$

Частота ω_0 в этом случае называется несущей, или центральной частотой. С сигналом (5.1) связывают так называемый сопряженный сигнал

$$y(t) = A(t) \sin\{\varphi(t) - \omega_0 t\},$$

который только тем и отличается от исходного сигнала, что одна тригонометрическая функция в его представлении заменяется на другую. Из исходного сигнала (5.1) сопряженный сигнал получается в результате

временного сдвига на четвертую часть от периода $T = 2\pi/\omega_0$ несущей частоты:

$$y(t) \approx x\left(t + \frac{T}{4}\right) = A\left(t + \frac{T}{4}\right) \cos\left\{\varphi\left(t + \frac{T}{4}\right) - \omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Это соотношение выполняется, если характерный интервал изменения амплитуды и фазы много больше, чем период несущей T . Если найден сопряженный процесс, то нахождение текущей амплитуды и фазы сигнала сводится к простым вычислениям:

$$A(t) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \omega_0 t.$$

Воспользовавшись известными тригонометрическими формулами для квазигармонического сигнала (5.1), можно записать

$$x(t) = C(t) \cos \omega_0 t + S(t) \sin \omega_0 t, \quad (5.2)$$

где функции $C(t) \equiv A(t) \cos \varphi(t)$ и $S(t) \equiv A(t) \sin \varphi(t)$ называются косинусной и синусной квадратурными составляющими, или просто квадратурами. Если ввести комплексный сигнал

$$z(t) = x(t) + iy(t) = A(t) \exp\{i[\varphi(t) - \omega_0 t]\} = Z(t) \exp\{-i\omega_0 t\}, \quad (5.3)$$

$$Z(t) \equiv C(t) + iS(t),$$

то амплитуда и фаза квазигармонического сигнала являются просто модулем и аргументом комплексного сигнала $Z(t)$, называемого комплексной амплитудой.

Очевидно, квадратуры, а также комплексная амплитуда медленно изменяются на периоде несущей частоты. Определим спектр комплексной амплитуды как

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\omega t\} Z(t) dt.$$

Будем считать, что этот спектр сосредоточен (отличен от нуля) в частотном диапазоне $[-\Delta, \Delta]$:

$$Z(t) = \int_{-\Delta}^{\Delta} \exp\{-i\omega t\} Z(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Поскольку комплексная амплитуда сигнала меняется значительно более медленно, чем несущее колебание, то можно предполагать $\Delta \ll \omega_0$. Сам квазигармонический сигнал при этом записывается как

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}\{Z(t)\exp\{-i\omega_0 t\}\} = \operatorname{Re} \int_{-\Delta}^{\Delta} \exp\{-i(\omega + \omega_0)t\} Z(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \\ &= \operatorname{Re} \int_{\omega_0 - \Delta}^{\omega_0 + \Delta} \exp\{-i\omega' t\} Z(\omega' - \omega_0) d\omega'. \end{aligned}$$

Таким образом, квазигармонический сигнал является реальной частью некоторого комплексного сигнала (5.3), спектр которого сосредоточен в узкой полосе частот. Заметим, только положительных частот. При таком толковании понятия квазигармонического сигнала и узкополосного сигнала перекрываются.

Сформулированные соотношения, исходя из теоремы Винера – Хинчина, можно обобщить для узкополосных случайных процессов. Будем называть узкополосным (квазигармоническим) такой СП $\xi(t)$, энергетический спектр которого сосредоточен в узкой полосе частот вблизи несущей: $\omega \in [\pm\omega_0 - \Delta, \pm\omega_0 + \Delta]$, причем $\Delta \ll \omega_0$. При этом, используя четность энергетического спектра и выделяя центральную частоту, имеем

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i\omega\tau\} W(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \int_0^{\infty} \cos(\omega\tau) W(\omega) \frac{d\omega}{\pi} = \int_{\omega_0 - \Delta}^{\omega_0 + \Delta} \cos(\omega\tau) W(\omega) \frac{d\omega}{\pi}.$$

После замены переменной интегрирования $\omega_1 = \omega - \omega_0$, интеграл становится в симметричных пределах и распадается на два слагаемых

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \int_{-\Delta}^{\Delta} \cos((\omega_1 + \omega_0)\tau) W(\omega_1 + \omega_0) \frac{d\omega_1}{\pi} = \\ &= K_1(\tau) \cos \omega_0 \tau - K_2(\tau) \sin \omega_0 \tau, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где
$$K_1(\tau) = \int_{-\Delta}^{\Delta} \cos(\omega_1\tau) W(\omega_1 + \omega_0) \frac{d\omega_1}{\pi}$$

и
$$K_2(\tau) = \int_{-\Delta}^{\Delta} \sin(\omega_1\tau) W(\omega_1 + \omega_0) \frac{d\omega_1}{\pi}.$$

Выражение (5.4) подобно (5.2). Мы получили, что для узкополосного СП корреляционная функция получается как сумма относительно медленно изменяющихся функции $K_{1,2}(\tau)$, промодулированных быстро изменяющимися гармоническими колебаниями с частотой ω_0 . Это важный признак узкополосных СП.

5.2. Аналитический сигнал

Введенные выше представления о комплексных и сопряженных сигналах в значительной степени базировались на том, что центральная частота спектра ω_0 известна. На практике часто бывает, что это не так, и выделить доминирующую частоту в случайном процессе либо затруднительно, либо вообще невозможно. Рассмотрим более общий подход к введению комплексных представлений, основанный на использовании понятия аналитического сигнала. Последнее время с переходом современной радиофизики к сверхширокополосным сигналам этот подход начинает широко использоваться на практике.

Общим для всех способов введения комплексных представлений является требование, чтобы измеряемый сигнал получался из комплексного как его реальная часть. Достаточно общим является предположение об отсутствии в спектре сигнала отрицательных частот. На ширину спектра никаких ограничений пока налагать не будем. Общим представлением такого сигнала является запись

$$z(t) = \int_0^{\infty} \exp\{-i\omega t\} z(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (5.5)$$

Определим свойства такой функции на плоскости комплексной переменной $t = t' + it''$. Чтобы такой интеграл существовал (сходился), необходимо, чтобы в этом интеграле $\text{Im}(t) = t'' < 0$. С точки зрения теории функций комплексной переменной это означает, что функция (5.5) является аналитической в нижней полуплоскости. Поэтому сигналы, описываемые функцией (5.5), называются аналитическими.

Воспользуемся формулой Коши для аналитических функций:

$$z(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{z(t_1) dt_1}{t_1 - t}. \quad (5.6)$$

Здесь интегрирование ведется по замкнутому контуру, охватывающему точку t и целиком лежащему в области аналитичности, т.е. в нижней

полуплоскости. Не нарушая этого требования, максимально раздвинем контур интегрирования так, чтобы он проходил вдоль вещественной оси и замыкался по дуге бесконечно большого радиуса в нижней полуплоскости. По лемме Жордана интеграл по дуге бесконечно большого радиуса равен нулю. В результате для (5.6) имеем

$$z(t) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z(t_1) dt_1}{t_1 - t}. \quad (5.6')$$

Устремим теперь переменную t на вещественную ось ($t'' \rightarrow -0$). В результате интеграл разбивается на два слагаемых, один из которых это интеграл в смысле Коши с выколотой точкой t , а второй – интеграл по полуокружности L_ϵ исчезающе малого радиуса с центром в той же точке t . Вторым интеграл вычисляется с помощью теории вычетов. В результате интегральное выражение (5.6') трансформируется в

$$z(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{z(t_1) dt_1}{t - t_1} + \frac{1}{2} z(t),$$

или, что то же самое,
$$z(t) = \frac{1}{\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{z(t_1) dt_1}{t - t_1}. \quad (5.7)$$

Функция, которая является решением этого интегрального уравнения, и будет описывать аналитический сигнал.

Выделим реальную и мнимую части для этой функции: $z = x + iy$. В результате из (5.7) получаем пару интегральных соотношений:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t_1) dt_1}{t - t_1}; \quad (5.8)$$

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t_1) dt_1}{t_1 - t}. \quad (5.9)$$

В теории интегральных преобразований эти соотношения известны как прямое и обратное преобразования Гильберта. Говорят, что функции $x(t)$ и $y(t)$ являются сопряженными по Гильберту.

В дальнейшем, вводя комплексный сигнал вместо реального, будем понимать его в смысле аналитического сигнала. Главное удобство от использования такого представления заключается в простом и одно-

значном переходе к амплитуде (огibaющей) и фазе сигнала

$$A(t) = |x(t) + iy(t)|, \quad \varphi(t) = \arctg \frac{y(t)}{x(t)}.$$

Само формирование аналитического сигнала $z(t)$ сводится к последовательности операций: вычислению комплексного спектра для исходного сигнала $x(\omega)$ путем использования преобразования Фурье, обнулении составляющих для отрицательных частот и удвоении для положительных частот, вычислению обратного преобразования Фурье. Это будет понятно из последующего. Существенным достоинством использования понятия аналитического сигнала является то, что для узкополосных сигналов он равнозначен использованию понятия комплексной амплитуды. На рис. 17 показан пример представления аналитического сигнала и его составляющих, а также фазовый портрет на комплексной плоскости.

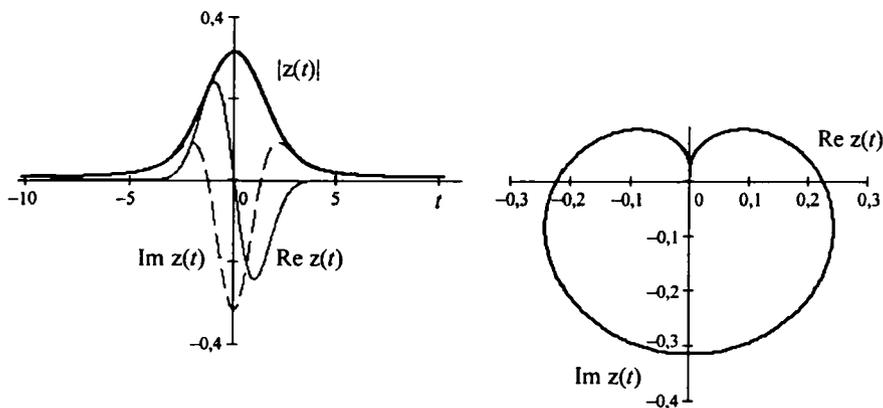


Рис. 17. Реальный, сопряженный и аналитический сигналы

5.3. Корреляционная функция сопряженного процесса

Будем рассматривать стационарные случайные процессы $\xi(t)$. Под сопряженным процессом $\eta(t)$ будем понимать такой СП, который получается из исходного $\xi(t)$ в результате преобразования Гильберта:

$$\eta(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(t_1) dt_1}{t_1 - t}. \quad (5.7)$$

Найдем корреляционную функцию сопряженного СП:

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \langle \delta\eta(t_1) \delta\eta(t_2) \rangle = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{\xi}(t' - t'')}{t' - t_1} \frac{dt' dt''}{t'' - t_2}.$$

После замены переменных $\tau_1 = t' - t_1$, $\tau_2 = t'' - t_2$, $\tau = t_1 - t_2$ получаем

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{\xi}(\tau_1 - \tau_2 + \tau)}{\tau_1 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2.$$

Сразу видно, что сопряженный СП является стационарным, как и исходный процесс.

Для дальнейшего удобно перейти к энергетическому спектру сопряженного процесса

$$W_{\eta}(\omega) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{\xi}(\tau_1 - \tau_2 + \tau)}{\tau_1 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 d\tau.$$

Представление под интегралом корреляционной функции через её спектр, а также того, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega\tau)}{\tau} d\tau = i \cdot \text{sgn}(\omega), \quad (5.8)$$

приводит к результату $W_{\eta}(\omega) = W_{\xi}(\omega)$, что автоматически означает по теореме Винера – Хинчина равенство корреляционных функций: $K_{\eta}(\omega) = K_{\xi}(\omega)$. Соотношение (5.8) легко доказывается с помощью теории вычетов.

Последнее означает сохранение для сопряженного процесса стационарности и равенства корреляционных функций и энергетических спектров.

5.4. Взаимная корреляция сопряженных процессов

В предыдущем разделе мы получили равенство корреляционных функций сопряженных СП. Возникает вопрос: как они коррелируют между собой?

Подобно тому, как это сделано выше, можно записать

$$K_{\xi, \eta}(t_1, t_2) = \langle \delta\xi(t_1) \delta\eta(t_2) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}(t_1 - t'') \frac{dt''}{t'' - t_2}.$$

После замены переменной интегрирования имеем

$$K_{\xi,\eta}(t_1, t_2) = \langle \delta\xi(t_1)\delta\eta(t_2) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}(\tau - \tau'') \frac{d\tau''}{\tau''} = K_{\xi,\eta}(\tau),$$

где $\tau \equiv t_1 - t_2$. Взаимный энергетический спектр, определяемый как

$$W_{\xi,\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\omega\tau\} K_{\xi,\eta}(\tau) d\tau,$$

с учетом равенства (5.8) получается в виде

$$W_{\xi,\eta}(\omega) = i \cdot \operatorname{sgn} \omega \cdot W_{\xi}(\omega). \quad (5.9)$$

Взаимный энергетический спектр оказался нечетной и чисто мнимой функцией.

С помощью обратного преобразования Фурье для взаимной корреляционной функции имеем

$$K_{\xi,\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega\tau) \operatorname{sgn} \omega \cdot W_{\xi}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \int_0^{\infty} \sin(\omega\tau) W_{\xi}(\omega) \frac{d\omega}{\pi}. \quad (5.10)$$

Это синус-преобразование Фурье.

Свойствами, следующими из (5.10), являются

$$K_{\xi,\eta}(\tau) = -K_{\xi,\eta}(-\tau) = -K_{\eta,\xi}(\tau), \quad K_{\xi,\eta}(\tau = 0) = 0.$$

Первое означает нечетность, а второе – ортогональность сопряженных СП. Последнее особенно подчеркивает, что корреляционная функция есть мера лишь линейной взаимосвязи, но не взаимозависимости.

5.5. Корреляция квадратурных составляющих

Обратимся снова к узкополосным случайным процессам с выделенной центральной частотой ω_0 . Будем считать таковым процесс $\xi(t)$. Для него согласно (5.7) можно построить сопряженный СП $\xi(t)$. В соответствии с общим определением (5.3) квадратурные составляющие СП

$$Z(t) \equiv C(t) + iS(t) = \exp\{i\omega_0 t\} \cdot [\xi(t) + i\eta(t)],$$

или, что то же самое,

$$C(t) = \xi(t) \cos \omega_0 t - \eta(t) \sin \omega_0 t,$$

$$S(t) = \xi(t) \sin \omega_0 t + \eta(t) \cos \omega_0 t.$$

Используя определение и несложные тригонометрические преобразования, найдем корреляционные функции для квадратур:

$$K_C(\tau) = K_\xi(\tau)\cos\omega_0\tau + K_{\xi,\eta}(\tau)\sin\omega_0\tau = K_S(\tau),$$

$$K_{C,S}(\tau) = K_\xi(\tau)\sin\omega_0\tau - K_{\xi,\eta}(\tau)\cos\omega_0\tau = -K_{S,C}(\tau). \quad (5.11)$$

Здесь $\tau \equiv t_1 - t_2$. Четность и нечетность этих функций подобна четности и нечетности сопряженных процессов. В этом смысле часто говорят, что процессы $C(t)$, $S(t)$ являются квадратурно сопряженными.

Можно заметить, что, во-первых, при формальной замене $\omega_0 \rightarrow 0$, СП $C(t)$, $S(t)$ просто переходят в процессы $\xi(t)$, $\eta(t)$, и, во-вторых, что при формальной замене $\omega_0 \rightarrow -\omega_0$, процессы $C(t)$, $S(t)$ и $\xi(t)$, $\eta(t)$ меняются местами. Отсюда можно сразу записать, что имеют место соотношения

$$K_\xi(\tau) = K_C(\tau)\cos\omega_0\tau - K_{C,S}(\tau)\sin\omega_0\tau = K_\eta(\tau),$$

$$K_{\xi,\eta}(\tau) = -K_C(\tau)\sin\omega_0\tau + K_{C,S}(\tau)\cos\omega_0\tau = -K_{\eta,\xi}(\tau). \quad (5.12)$$

Общими свойствами являются:

$$K_\xi(0) = K_\eta(0) = K_C(0) = K_S(0) = \sigma^2,$$

$$K_{\xi,\eta}(0) = K_{C,S}(0) = 0.$$

Последнее равенство означает некоррелированность сопряженных процессов в совпадающие моменты времени.

Заслуживает отдельного внимания одно очень интересное свойство квадратур: при симметричном относительно центральной частоты ω_0 спектре СП его квадратуры некоррелированы в произвольные моменты времени. Доказывается это просто. Согласно (5.11), (5.10) и (1.19), имеем

$$K_{C,S}(\tau) = \int_0^{\infty} W_\xi(\omega)\sin(\omega_0 - \omega)\tau \frac{d\omega}{\pi} = - \int_{-\Delta}^{\Delta} W_\xi(\omega_1 + \omega_0)\sin\omega_1\tau \frac{d\omega_1}{\pi}.$$

Симметричность спектра исходного СП относительно частоты ω_0 означает равенство $W_\xi(\omega_1 + \omega_0) = W_\xi(-\omega_1 + \omega_0)$. В этом случае интеграл берется в симметричных пределах от нечетной функции и равен нулю, т.е. $K_{C,S}(\tau) = 0$. В этом случае корреляционные функции сопряженных процессов имеют особенно простой вид:

$$K_\xi(\tau) = K_C(\tau)\cos\omega_0\tau = K_\eta(\tau),$$

$$K_{\xi,\eta}(\tau) = -K_C(\tau)\sin\omega_0\tau = -K_{\eta,\xi}(\tau).$$

На практике указанная симметричность спектра часто выполняется. Более того, некоррелированность квадратур свидетельствует о такой симметричности энергетического спектра исходного СП.

5.6. Распределение огибающей и фазы нормального узкополосного шума

Существует очень большое число случаев, когда регистрируемый сигнал представляет собой узкополосный нормальный СП. Такая ситуация возникает, например, при дальнем тропосферном распространении радиоволн, когда сигнал за горизонт проникает за счет рассеяния на турбулентных неоднородностях тропосферы. Подобным образом ведут себя сигналы, рассеянные неровными поверхностями. Нормальность процессов обеспечивается суммированием большого числа приблизительно равнозначных составляющих.

Итак, рассмотрим центрированный нормальный СП, энергетический спектр которого отличен от нуля в узкой полосе частот: $\omega \in [\pm\omega_0 - \Delta, \pm\omega_0 + \Delta]$, $\Delta \ll \omega_0$. Рассмотрим сначала распределение квадратурных составляющих СП, которые получаются как

$$C(t) = \xi(t)\cos\omega_0 t - \eta(t)\sin\omega_0 t, \quad S(t) = \xi(t)\sin\omega_0 t + \eta(t)\cos\omega_0 t.$$

Сопреженный сигнал $\eta(t)$ есть результат применения линейного преобразования – преобразования Гильберта (5.7) к исходному процессу $\xi(t)$. Учитывая результаты предыдущих глав можно утверждать, что квадратуры, являющиеся линейными преобразованиями нормального СП, также распределены по нормальному закону с нулевой средней. В совпадающие моменты времени они некоррелированы, а значит, и независимы. Отсюда сразу запишем совместный закон их распределения:

$$f(C, S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{C^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Здесь σ^2 – дисперсия исходного процесса.

Введем понятие амплитуды (огибающей) $A(t)$ и фазы $\varphi(t)$ процесса через квадратурные составляющие:

$$C(t) = A(t)\cos\varphi(t), \quad S(t) = A(t)\sin\varphi(t).$$

При этом, конечно, $A \in [0, \infty)$ и $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Закон их совместного распределения получается с использованием известного правила (4.22):

$$f_{A,\varphi}(A, \varphi) = f(C = A \cos \varphi, S = A \sin \varphi) \cdot A = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (5.13)$$

Здесь учтено, что якобиан перехода есть $J = A$.

Закон распределения огибающей с учетом свойства согласованности распределений имеет вид

$$f_A(A) = \int_{-\pi}^{\pi} f_{A,\varphi}(A, \varphi) d\varphi = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad A \in [0, \infty). \quad (5.14)$$

А закон распределения фазы следующий:

$$f_{\varphi}(\varphi) = \int_0^{\infty} f_{A,\varphi}(A, \varphi) dA = \frac{1}{2\pi}, \quad \varphi \in [-\pi, \pi]. \quad (5.15)$$

Это равномерный закон. Очевидно, что

$$f_{A,\varphi}(A, \varphi) = f_A(A) f_{\varphi}(\varphi),$$

т.е. амплитуда и фаза независимы.

Закон распределения амплитуды вида (5.14) называется законом распределения Рэлея. Среднее значение амплитуды для него

$$\langle A \rangle = \int_0^{\infty} A \cdot f_A(A) dA = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Выражение для дисперсии имеет вид

$$\sigma_A^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2, \quad \langle A^2 \rangle = \int_0^{\infty} A^2 \cdot f_A(A) dA = 2\sigma^2.$$

Глубина замираний определяется как

$$\alpha = \frac{\sigma_A^2}{\langle A \rangle^2} = \frac{\langle A^2 \rangle}{\langle A \rangle^2} - 1 = \frac{4 - \pi}{\pi} = 0,273.$$

Это эквивалентно значению $10 \lg(\alpha) = -5,64$ дБ. Считается, что для нормального СП характерны наиболее глубокие замирания (вариации) амплитуды сигнала. Близость глубины замираний к найденному значению служит индикатором: распределения амплитуды по закону Релея, самого сигнала по нормальному закону и отсутствия когерентной составляющей сигнала.

5.7. Распределение огибающей смеси сигнала с шумом

Во многих случаях когерентная составляющая сигнала не равна нулю, и тогда говорят о смеси сигнала с шумом. Рассмотрим задачу о законе распределения узкополосного нормального СП с не равным нулю средним значением. Обозначим через $A_0(t)$ и $\varphi_0(t)$ амплитуду и фазу детерминированной составляющей сигнала. Квадратуры для неё определяются как

$$\langle C(t) \rangle = A_0(t) \cos \varphi_0(t), \quad \langle S(t) \rangle = A_0(t) \sin \varphi_0(t).$$

Повторяя рассуждения, приведенные в начале предыдущего раздела, о нормальности и независимости распределения квадратур, запишем закон их совместного распределения:

$$f(C, S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(C - \langle C \rangle)^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(S - \langle S \rangle)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Переходя теперь к совместному закону распределения амплитуды и фазы сигнала, получим

$$f_{A,\varphi}(A, \varphi) = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A^2 - 2AA_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + A_0^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (5.16)$$

Видно, что амплитуда и фаза в общем случае не являются независимыми.

Закон распределения амплитуды получается путем простого интегрирования (5.16):

$$\begin{aligned} f_A(A) &= \int_{-\pi}^{\pi} f_{A,\varphi}(A, \varphi) d\varphi = f_{A,\varphi}(A, \varphi) = \\ &= \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A^2 + A_0^2}{2\sigma^2}\right\} I_0\left(\frac{AA_0}{\sigma^2}\right), \quad A \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Здесь $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{x \cos \varphi\} d\varphi$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Закон распределения (5.17) является обобщением закона Рэлея и называется обобщенным законом распределения Рэлея (рис. 18). Этот закон известен также как закон Райса.

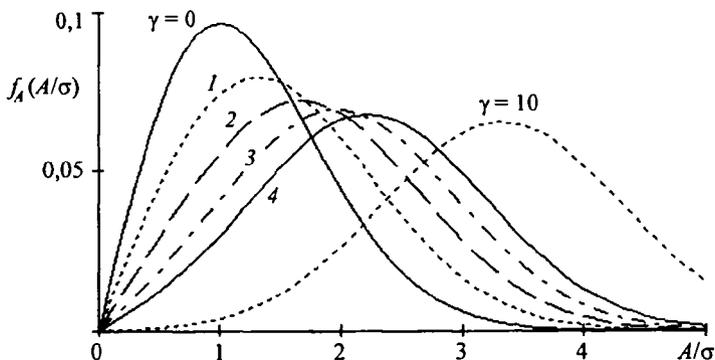


Рис. 18. Закон распределения амплитуды смеси сигнал+шум

Исследуем его поведение при изменении параметра $\gamma = A_0^2/\sigma^2$, называемого отношением сигнал – шум (ОСШ). Здесь можно выделить два предельных случая: малого и большого ОСШ. При малом ОСШ ($\gamma \ll 1$) мы имеем переход к закону Рэлея. При большом ОСШ ($\gamma \gg 1$) можно воспользоваться асимптотикой модифицированной функции Бесселя и записать

$$f_A(A) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(A-A_0)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad A \in [0, \infty).$$

Таким образом, распределение амплитуды нормализуется и в пределе при $\gamma \rightarrow \infty$ переходит в δ -функцию. Последнее означает, что амплитуда становится детерминированной.

5.8. Распределение фазы смеси сигнала с шумом

Чтобы получить закон распределения фазы при наличии отличной от нуля детерминированной составляющей, необходимо, продолжая выкладки предыдущего раздела, вычислить интеграл:

$$f_\varphi(\varphi) = \int_0^\infty f_{A,\varphi}(A, \varphi) dA = \int_0^\infty \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A^2 - 2AA_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + A_0^2}{2\sigma^2}\right\} dA,$$

$$\varphi \in [-\pi, \pi].$$

За счет тригонометрических преобразований перепишем его в более удобном виде:

$$f_{\varphi}(\varphi) = \exp\left\{-\frac{A_0^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)}{2\sigma^2}\right\} \int_0^{\infty} \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{[A - A_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]^2}{2\sigma^2}\right\} dA.$$

Можно представить этот интеграл через так называемый интеграл вероятности. Здесь мы ограничимся лишь асимптотическим анализом записанного выражения при малом и большом ОСШ.

Случай малого ОСШ ($\gamma \ll 1$) почти тривиален: получается равномерный закон распределения. Более интересен случай большого ОСШ ($\gamma \gg 1$). При этом множитель, стоящий перед интегралом, становится определяющим. Отличный от нуля вклад будет получаться в малом диапазоне изменения φ вблизи значения $\varphi \approx \varphi_0$, так что $\sin(\varphi - \varphi_0) \approx \varphi - \varphi_0$ и $\cos(\varphi - \varphi_0) \approx 1$. С учетом этого имеем

$$\begin{aligned} f_{\varphi}(\varphi) &\approx \exp\left\{-\frac{A_0^2 (\varphi - \varphi_0)^2}{2\sigma^2}\right\} \int_0^{\infty} \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{[A - A_0]^2}{2\sigma^2}\right\} dA \approx \\ &\approx \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{A_0^2 (\varphi - \varphi_0)^2}{2\sigma^2}\right\}. \end{aligned}$$

Получился нормальный закон распределения со средним значением $\langle \varphi \rangle = \varphi_0$ и дисперсией распределения $\sigma_{\varphi}^2 = \gamma^{-1}$. Измерение дисперсии фазы может быть использовано для оценки ОСШ и наоборот.

В пределе при $\gamma \rightarrow \infty$ закон распределения фазы переходит в δ -функцию. Это означает, что фаза становится детерминированной. Поведение плотности распределения фазы в общем случае показано на рис. 19.

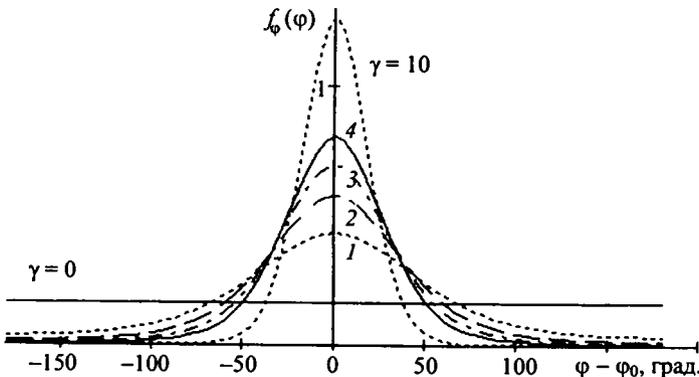


Рис. 19. Закон распределения фазы смеси сигнал+шум

5.9. Теорема Котельникова

Взаимосвязь временных и частотных характеристик сигналов может быть использована для измерения характеристик сигналов. Основопологающей здесь является теорема об отсчетах, известная в отечественной литературе как теорема Котельникова. Рассмотрим её суть сначала в общем случае, а затем уточним для узкополосных СП.

Сформулируем теорему Котельникова для СП следующим образом: «Случайный процесс с ограниченным энергетическим спектром полностью характеризуется дискретным набором своих сечений, взятых с шагом не большим, чем половина периода наиболее высокой частоты в энергетическом спектре». Речь идет об описании стационарных СП в пределах корреляционной теории.

Рассмотрим стационарный СП, энергетический спектр которого отличен от нуля в пределах диапазона $[-\Omega, \Omega]$. Из теории рядов Фурье известно, что функция, обладающая такими свойствами, представима рядом Фурье:

$$W(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left\{i \frac{\pi n}{\Omega} \omega\right\}, \quad (5.18)$$

где коэффициенты разложения определяются интегралами от этой функции

$$c_n = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \exp\left\{-i \frac{\pi n}{\Omega} \omega\right\} W(\omega) d\omega.$$

По теореме Винера – Хинчина интеграл (5.18) связан с корреляционной функцией:

$$c_n = \frac{\pi}{\Omega} K\left(\tau = \frac{\pi n}{\Omega}\right).$$

В результате для энергетического спектра (5.18) имеем

$$W(\omega) = \frac{\pi}{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K\left(\tau = \frac{\pi n}{\Omega}\right) \exp\left\{i \frac{\pi n}{\Omega} \omega\right\}.$$

С другой стороны, по той же теореме Винера – Хинчина сама корреляционная функция может быть вычислена через энергетический спектр:

$$K(\tau) = \int_{-\Omega}^{\Omega} W(\omega) \exp\{i\omega\tau\} \frac{d\omega}{2\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K\left(\frac{\pi n}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega\tau - n\pi)}{(\Omega\tau - n\pi)}. \quad (5.19)$$

Полученный ряд называется рядом Котельникова.

Согласно определению КФ, для стационарных СП можно записать

$$K\left(\frac{\pi n}{\Omega}\right) = \left\langle \delta\xi\left(t + \frac{\pi n}{\Omega}\right) \delta\xi(t) \right\rangle. \quad (5.20)$$

Величина t здесь произвольная, а значит, может быть и дискретной, например, $t_m = \pi m/\Omega$. Это означает, что для получения (5.20) вполне достаточно отчетов случайного процесса в дискретных сечениях $t_m = \pi m/\Omega$. Эти сечения и сами отсчеты КФ в (5.19) взяты с шагом $\Delta\tau = \pi/\Omega = T/2$, где $T \equiv 2\pi/\Omega$ – период самой высокой частоты в спектре. Если теперь искусственно раздвинуть спектр, дополнив его нулями, то это будет эквивалентно увеличению Ω и уменьшению шага $\Delta\tau$. Точность восстановления КФ только возрастет. Теорема доказана.

Разложение в ряд Котельникова (5.19) может быть использовано и для узкополосных случайных процессов. Достаточно положить $\Omega = \omega_0 + \Delta \approx \omega_0$. В этом случае, по сути дела, привязка будет идти к несущей частоте сигналов. Однако правильность оцифровки этой составляющей не важна, поскольку величина ω_0 и так известна. Иначе говоря, при этом никак не используется, что энергетический спектр узкополосного СП равен нулю на значительной части частотного интервала $[-\omega_0 + \Delta, \omega_0 - \Delta]$. Ситуация существенно улучшится, если сечения брать для квадратурных компонент, для которых спектр локализован диапазоном $[-\Delta, +\Delta]$ и ряд Котельникова записывается как

$$K_C(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_C\left(\frac{\pi n}{\Delta}\right) \frac{\sin(\tau\Delta - n\pi)}{(\tau\Delta - n\pi)},$$

$$K_{C,S}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{C,S}\left(\frac{\pi n}{\Delta}\right) \frac{\sin(\tau\Delta - n\pi)}{(\tau\Delta - n\pi)}.$$

В результате с использованием (5.12) можно записать

$$K(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ K_C\left(\frac{\pi n}{\Delta}\right) \cos\omega_0\tau - K_{C,S}\left(\frac{\pi n}{\Delta}\right) \sin\omega_0\tau \right\} \frac{\sin(\tau\Delta - n\pi)}{(\tau\Delta - n\pi)}.$$

Шаг следования сечений взят как $\delta\tau = \pi/\Delta$, и поскольку для узкополосных СП $\Delta \ll \omega_0$, выигрыш будет значителен: $\delta\tau/\Delta \approx \omega_0/\Delta \gg 1$.

Теорема Котельникова для узкополосных СП может быть сформулирована следующим образом: «Узкополосный случайный процесс полностью характеризуется дискретным набором своих сечений, взятых с шагом не большим, чем половина периода наиболее высокой частоты в энергетическом спектре квадратурных компонент».

5.10. Контрольные вопросы

- Что такое амплитуда и фаза случайного процесса?
- Что такое аналитический случайный процесс?
- Каковы корреляционная функция и энергетический спектр аналитического сигнала?
- Когда имеет место независимость сопряженных по Гильберту случайных процессов?
- Записать распределение Рэлея.
- При каких значениях отношения сигнал – шум распределения амплитуды и фазы случайного процесса нормализуются?
- Сформулировать теорему Котельникова для узкополосных случайных процессов.

Глава 6

ПРИЕМ СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ ШУМОВ

Любой реальный сигнал является случайным процессом. Возникает лишь вопрос о соотношении его детерминированной и флуктуационной составляющих. Детерминированная составляющая называется также когерентной составляющей или средним значением случайного процесса (СП). Флуктуационная составляющая называется некогерентной составляющей, шумом или центрированным СП. Несмотря на кажущуюся очевидность такого представления, само деление сигналов на детерминированные и флуктуационные составляющие весьма условно: детерминированная составляющая может сложным образом изменяться во времени и внешне походить на шум. Существует даже такое понятие, как сигнал типа «детерминированный хаос». Последнее время эти сигналы начинают очень широко использоваться в системах сверхскоростной связи и сверхширокополосного зондирования. Что касается информации, то очевидно, что сложный сигнал переносит больше информации, чем простой. К этой стороне дела мы еще вернемся в главе 7.

Имея все это в виду, вернемся к вопросу о приеме сигналов в условиях шумов. Здесь выделяют две задачи: выделения сигналов из шумов и обнаружения сигнала. Рассмотрим каждую из них отдельно.

6.1. Оптимальный фильтр

Рассмотрим простейшую задачу выделения сигналов из шумов. Будем считать, что принимаемый нами сигнал представим в виде суммы

$$x(t) = \eta(t) + \xi(t),$$

где оба слагаемых являются центрированными стационарными СП, но один из них для нас является сложным полезным сигналом $\eta(t)$, а второй – шумом $\xi(t)$. Между собой они независимы.

Задача выделения заключается в построении такого способа декомпозиции суммарного сигнала, чтобы полезный сигнал в максимально неискаженном виде выделялся из смеси сигнал+шум.

Эту задачу можно образно назвать «задачей Золушки» из известной всем сказки. Там злая мачеха, чтобы не пустить Золушку на бал, высыпала зерно двух разных сортов на пол в одну кучу и велела к утру разделить их по сортам, собрав в разные мешки снова. В сказке поставленную задачу решили трудолюбивые мышки, получившие соответствующую команду от феи, и Золушка попала на бал. Нам эту задачу помогут решить уже накопленные знания методов статистической радиофизики.

Попытаемся решить задачу выделения с помощью линейной фильтрации. Мысленно построим такой фильтр, чтобы на его выходе формировался сигнал

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau,$$

максимально подобный полезному сигналу $\eta(t)$ (рис. 20):

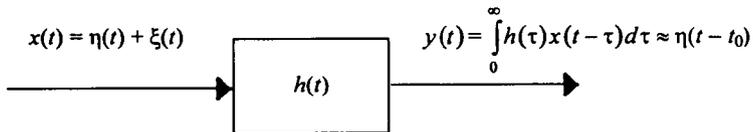


Рис. 20. Выделение сигнала оптимальным фильтром

Для этого потребуем, чтобы величина

$$\mu^2 = \left\langle \left[y(t) - \eta(t-t_0) \right]^2 \right\rangle,$$

называемая дисперсией ошибки воспроизведения, была минимальна. Здесь t_0 – некоторое время, которое необходимо фильтру для выполнения этой операции. Расписывая выражение (6.1), имеем при этом

$$\mu^2 = \left\langle \left[\int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau - \eta(t-t_0) \right]^2 \right\rangle = \quad (6.1)$$

$$= \sigma_{\eta}^2 + \iint_0^{\infty} h(\tau')h(\tau'') [K_{\eta}(\tau'-\tau'') + K_{\xi}(\tau'-\tau'')] d\tau' d\tau'' - 2 \int_0^{\infty} h(\tau)K_{\eta}(\tau-t_0)d\tau',$$

где $\sigma_{\eta}^2 = K_{\eta}(0)$ и $K_{\eta}(\tau)$ – дисперсия и корреляционная функция полезного сигнала, а $K_{\xi}(\tau)$ – корреляционная функция шумового сигнала.

Для минимизации дисперсии ошибки воспроизведения применим вариационный анализ. Предположим, что мы уже нашли импульсную характеристику нужного нам фильтра $h(\tau)$. Проведем некоторую малую, вообще говоря, произвольную её вариацию $h(\tau) \rightarrow h(\tau) + \delta h(\tau)$. При этом для вариации дисперсии ошибки воспроизведения с точностью до первого порядка малости членов имеем

$$\delta(\mu^2) = 2 \int_0^{\infty} \delta h(\tau') \left\{ \int_0^{\infty} h(\tau'') [K_{\eta}(\tau' - \tau'') + K_{\xi}(\tau' - \tau'')] d\tau'' - K_{\eta}(\tau' - t_0) \right\} d\tau'. \quad (6.2)$$

Вариационной производной называется функция

$$\frac{\delta(\mu^2)}{\delta h(\tau')} = 2 \left\{ \int_0^{\infty} h(\tau'') [K_{\eta}(\tau' - \tau'') + K_{\xi}(\tau' - \tau'')] d\tau'' - K_{\eta}(\tau' - t_0) \right\}.$$

Если импульсная характеристика $h(\tau)$ найдена нами оптимально, то при произвольного вида малой вариации $\delta h(\tau)$ интеграл (6.2) должен быть следующего порядка малости. Это может быть только в случае, если выражение, стоящее в фигурных скобках под интегралом в (6.2), обращается в нуль, т.е.

$$\int_0^{\infty} h(\tau'') [K_{\eta}(\tau' - \tau'') + K_{\xi}(\tau' - \tau'')] d\tau'' = K_{\eta}(\tau' - t_0). \quad (6.3)$$

То, что мы сделали, эквивалентно приравнованию к нулю вариационной производной функционала (6.1). Мы получили интегральное уравнение для оптимизирующей импульсной характеристики фильтра. Уравнение (6.3) называется уравнением Винера – Хопфа.

Решение уравнения Винера – Хопфа (6.3) может быть получено в предположении, что время, необходимое для разделения сигналов t_0 , достаточно велико по сравнению с интегральными масштабами корреляции каждого из процессов в смеси сигнал+шум:

$$t_0 \gg \tau_{\eta}, \tau_{\xi}. \quad (6.4)$$

В этом случае можно считать, что $|\tau' - t_0| \leq \tau_{\eta}$, но $|\tau' - \tau''| \leq \tau_{\eta}, \tau_{\xi}$. Поэтому под интегралом в (6.2) можно принять $|\tau'' - t_0| \leq \tau_{\eta}, \tau_{\xi}$ и далее $\tau'' \gg \tau_{\eta}, \tau_{\xi}$. В конечном счете это означает, что с учетом предположения (6.4) нижний предел в интеграле (6.3) без большой ошибки может быть раздвинут до минус бесконечности. Уравнение (6.3) становится уравне-

нием в свертках и решается с помощью преобразования Фурье, применяя которое имеем

$$H(\omega)[W_{\eta}(\omega) + W_{\xi}(\omega)] = W_{\eta}(\omega)\exp(i\omega t_0).$$

В результате для передаточной функции искомого фильтра получаем

$$H(\omega) = \frac{W_{\eta}(\omega)}{W_{\eta}(\omega) + W_{\xi}(\omega)} \exp(i\omega t_0). \quad (6.5)$$

Фильтр с такой характеристикой называется оптимальным.

Минимальное значение ошибки воспроизведения получается, если в (6.1) подставить (6.5):

$$\min(\mu^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_{\eta}(\omega)W_{\xi}(\omega)}{W_{\eta}(\omega) + W_{\xi}(\omega)} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (6.6)$$

Очевидно, наилучшее разделение шума и сигнала происходит при полном неперекрывании их энергетических спектров. Так, используя оптимальный фильтр, можно попытаться, например, разделить голос певца и музыку в записи песни.

6.2. Согласованный фильтр

Часто при приеме сигналов в условиях шумов важным является не правильное восстановление формы полезного сигнала, а само установление наличия такового. Такая задача возникает при радиолокационном обнаружении целей. Аналогичная задача решается в теории распознавания образов. Здесь известно, какие в принципе могут быть сигналы, и ставится задача идентификации предъявляемых реализаций. Например, идентификации человека по его отпечаткам. Рассмотрим основные положения теории обнаружения. Первым понятием здесь является согласованная фильтрация.

Для простоты будем считать, что полезный сигнал является детерминированным $S_0(t)$, а шум – центрированным стационарным случайным процессом с известным энергетическим спектром $W_{\xi}(\omega)$. Суммарный принимаемый сигнал записывается как

$$x(t) = S_0(t) + \xi(t). \quad (6.7)$$

Количественной мерой наличия шума в таком сигнале является отношение сигнал – шум (ОСШ), которое определяется как

$$\gamma_0(t) = \frac{|S_0(t)|^2}{\sigma_\xi^2}.$$

Если дисперсия шума σ_ξ^2 мала, то ОСШ должно быть велико при наличии сигнала. На практике шумы могут быть велики, и тогда до принятия каких-либо решений о наличии полезного сигнала сначала желательно увеличить ОСШ. Попытаемся отыскать решение с использованием линейной фильтрации.

Сигнал на выходе линейного фильтра запишем в виде

$$y(t) = S(t) + \zeta(t), \quad (6.8)$$

где полезный сигнал на выходе выражается через спектр сигнала на входе и передаточную функцию фильтра:

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S_0(\omega) \exp\{-i\omega t\} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Согласно теории главы 3, дисперсия шума на выходе меняется и определяется соотношением

$$\sigma_\zeta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 W_\xi(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Изменяется и ОСШ на выходе:

$$\gamma(t) = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S_0(\omega) \exp\{-i\omega t\} \frac{d\omega}{2\pi} \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 W_\xi(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}}. \quad (6.9)$$

Поставим себе задачу максимально повысить ОСШ (6.9) за счет подходящего выбора передаточной функции фильтра $H(\omega)$. Применим вариационный подход.

Пусть нам удалось подобрать такую функцию, и в момент времени t_0 мы добились максимального ОСШ. Проведем некоторую малую, вообще говоря, произвольную её вариацию $H(\omega) \rightarrow H(\omega) + \delta H(\omega)$. При этом для ОСШ (6.9) с точностью до первого порядка малости членов имеем

$$\delta(\gamma(t_0)) = 2Q \int_{-\infty}^{\infty} \delta H(\omega) [S_0(\omega) \exp\{-i\omega t_0\} - W_\xi(\omega) H^*(\omega)] d\omega,$$

где

$$Q \equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} H^*(\omega) S_0^*(\omega) \exp\{i\omega t_0\} \frac{d\omega}{2\pi}}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 W_\xi(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}}.$$

Вариационной производной является функция

$$\frac{\delta(\gamma(t_0))}{\delta H(\omega)} = 2Q [S_0(\omega) \exp\{-i\omega t_0\} - W_\xi(\omega) H^*(\omega)].$$

Приравнивая её к нулю, получаем выражение для искомой характеристики фильтра

$$H(\omega) = \frac{S_0^*(\omega) \exp\{i\omega t_0\}}{W_\xi(\omega)}. \quad (6.10)$$

Фильтр с такой характеристикой называется согласованным.

Найденный фильтр (6.10) согласован и с сигналом, когерентно усиливая его спектральные составляющие, и с шумом, соответственно ослабляя его спектральные составляющие. На выходе фильтра полезный сигнал

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_0(\omega)|^2}{W_\xi(\omega)} \exp\{-i\omega(t-t_0)\} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Форма этого сигнала нелинейно искажается: он как бы обостряется во времени и усиливается в момент времени $t = t_0$. В этот момент сигнал становится положительным и максимальным:

$$S_m \equiv S(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_0(\omega)|^2}{W_\xi(\omega)} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Дисперсия шума, наоборот, относительно уменьшается и становится равной

$$\sigma_\zeta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_0(\omega)|^2}{W_\xi(\omega)} \frac{d\omega}{2\pi} = S_m. \quad (6.11)$$

В целом ОСШ на выходе согласованного фильтра

$$\gamma(t) = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_0(\omega)|^2}{W_{\xi}(\omega)} \exp\{-i\omega(t-t_0)\} \frac{d\omega}{2\pi} \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_0(\omega)|^2}{W_{\xi}(\omega)} \frac{d\omega}{2\pi}}$$

и достигает своего максимального значения в момент времени $t = t_0$ (рис. 21):

$$\max \gamma(t) = \gamma(t_0) = S_m.$$

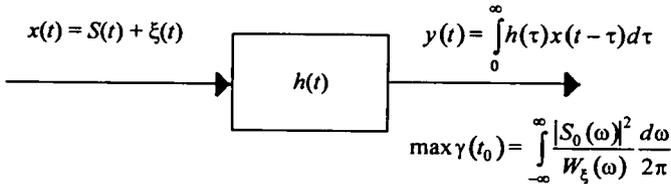


Рис. 21. Повышение отношения сигнал – шум согласованным фильтром

Заметим, что сам момент времени $t = t_0$, вообще говоря, произвольный, априорно задается исследователем, но должен быть много больше интегрального масштаба корреляции входного шума и характерного времени изменения входного сигнала.

6.3. Корреляционный прием

Рассмотрим частный случай, когда в смеси сигнал+шум на входе согласованного фильтра шум является белым:

$$W_{\xi}(\omega) = W_0 = \text{const.}$$

На выходе согласованного фильтра полезный сигнал имеет вид

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_0(\omega)|^2}{W_0} \exp\{-i\omega(t-t_0)\} \frac{d\omega}{2\pi} = \\ &= \frac{1}{W_0} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\tau-t) S_0(\tau-t_0) d\tau. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Полный сигнал на выходе

$$y(t) = \frac{1}{W_0} \int_{-\infty}^{\infty} [S_0(\tau-t) + \xi(\tau-t)] S_0(\tau-t_0) d\tau. \quad (6.13)$$

В то время, как ОСШ на входе исчезающе мало, $\gamma_0 \rightarrow 0$, на выходе

$$\gamma(t) = \frac{\frac{1}{W_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\tau-t) S_0(\tau-t_0) d\tau \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_0(\tau-t_0) S_0(\tau-t_0) d\tau}$$

и при $t = t_0$ достигает максимального значения:

$$\max \gamma(t) = \gamma(t_0) = S_m = \frac{1}{W_0} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\tau-t_0) S_0(\tau-t_0) d\tau.$$

Эта величина конечная. Выигрыш достаточно большой:

$$\gamma(t_0) / \gamma_0 \gg 1.$$

Заметим, что выражения (6.12) и (6.13) с точностью до постоянного множителя представляют собой корреляционные функции. Поэтому согласованную фильтрацию часто ассоциируют с корреляционным приемом.

Для примера представим себе входной сигнал в виде прямоугольного импульса:

$$S_0(t) = S_0 \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Задав $t_0 = 0$, путем элементарных вычислений получаем

$$S(t) = \frac{S_0^2 T}{W_0} \left(1 - \frac{|t|}{T}\right), \quad \gamma(t) = S_m \left(1 - \frac{|t|}{T}\right), \quad S_m = \frac{S_0^2 T}{W_0}, \quad |t| \leq T.$$

Сигнал исказил свою форму: из прямоугольного сигнал превратился в треугольный (рис. 22). Обострение сигнала в момент времени t_0 и обеспечивает максимальное увеличение ОСШ в этот момент.

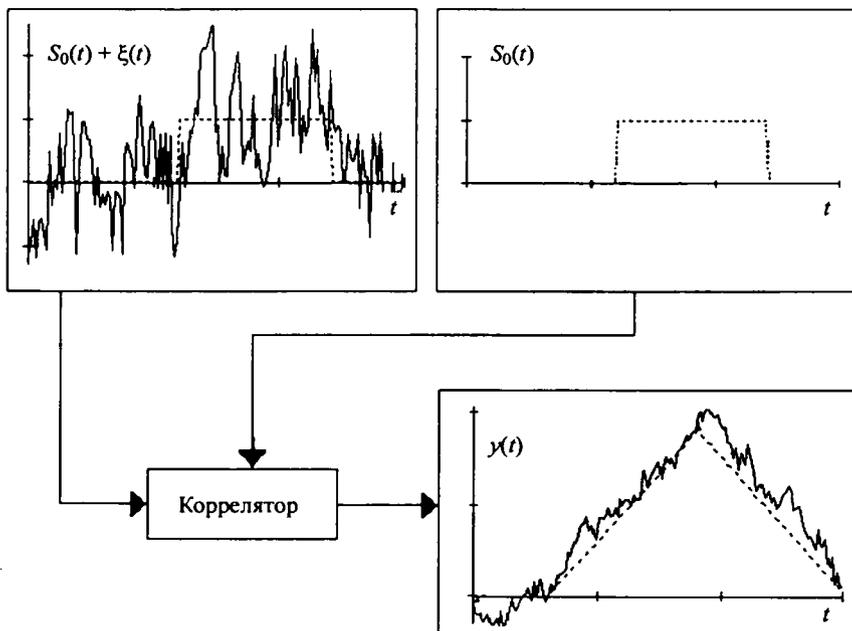


Рис. 22. К пояснению понятия «корреляционный прием»

6.4. Отношение правдоподобия и обнаружение сигнала

Максимально увеличив ОСШ в результате согласованной фильтрации для выходного сигнала

$$y(t_0) = S_m + \zeta(t_0), \quad (6.14)$$

можно приступить к решению следующей здесь задачи – задачи обнаружения и принятия решения о наличии полезного сигнала. Разумеется, делать это лучше в момент t_0 . Сигнал $z \equiv y(t_0)$ остается случайным, и поэтому решение этой задачи должно использовать вероятностный подход. Действуя стандартным способом, определим так называемое отношение правдоподобия следующим образом:

$$\Lambda = \frac{f(z|1)}{f(z|0)},$$

где $f(z|1)$ и $f(z|0)$ – плотности распределения суммарного сигнала при

условии, что в смеси (6.14) на самом деле сигнал есть или нет соответственно. Если $f(\zeta)$ – безусловная плотность распределения шума, то, очевидно, $f(z|0) = f(z)$ и $f(z|1) = f(z - S_m)$.

Далее ограничимся рассмотрением случая, когда шум распределен по нормальному закону. При этом для отношения правдоподобия имеем

$$\Lambda = \exp \left\{ -\frac{(z - S_m)^2}{2\sigma_\zeta^2} + \frac{(z)^2}{2\sigma_\zeta^2} \right\} = \exp \left\{ z - \frac{S_m}{2} \right\}.$$

Здесь учтено, что согласно (6.11) $\sigma_\zeta^2 = S_m$.

Для принятия решения необходимо из каких-либо соображений задание порогового значения отношения правдоподобия Λ_n . Принятие решения основано на следующем. Если для измеренного значения z оказалось $\Lambda \geq \Lambda_n$, то принимается решение о наличии полезного сигнала в смеси сигнал + шум. Если же оказалось, что $\Lambda < \Lambda_n$, то принимается решение об отсутствии полезного сигнала. Часто используется равнозначная форма соответствующих неравенств: $z \geq z_n$ и $z < z_n$, где $z_n = \ln \Lambda_n + S_m/2$ (рис. 23). Выбор порогового уровня z_n соответствует делению всего диапазона возможных значений на две дополняющие друг друга части. Попадание измеренного значения z в одну из них, например превышение порога, соответствует принятию положительного решения о наличии сигнала. Попадание в другую часть – решению об отсутствии сигнала. Для выбора пороговых значений Λ_n или z_n существует множество подходов, некоторые из которых мы рассмотрим в следующих пунктах данной главы.

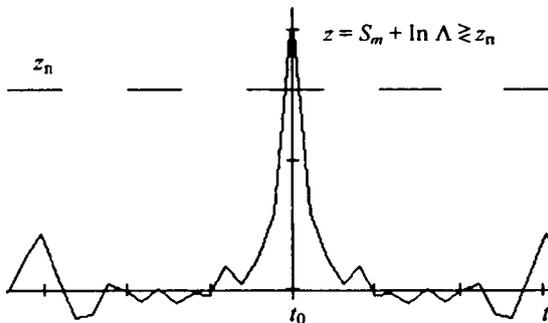


Рис. 23. К обнаружению сигнала

Сделаем несколько важных замечаний:

1. Пороговое значение отношения правдоподобия является инвариантом линейной фильтрации. Следует это из того, что величина S_m согласно её определению остается неизменной до и после линейной фильтрации.

2. Хотя сформулированный подход строго справедлив только для нормальных шумов, он применим и для произвольных шумов. Оправдывается это множеством факторов, которые приводят к нормализации шумов, если не на входе, так на выходе линейных устройств – фильтров и усилителей, без которых не работает ни одна радиотехническая система.

3. Измеряемый сигнал может быть многомерным. В этом случае приведенные формулы легко обобщаются с введением векторных обозначений, например, \underline{S}_m .

6.5. Критерии обнаружения

Все критерии обнаружения имеют своей целью определение пороговых значений. Наиболее широко этот подход используется в радиолокации, поэтому для наглядности, следуя традициям этого раздела радиофизики, при обнаружении сигнала будем говорить об обнаружении цели. Выбор того или иного порога, в конечном счете, приводит к принятию решения, вытекающего из обнаружения или необнаружения. Например, пуску или не пуску ракет по самолетам противника. Образно выражаясь, выбор критерия обнаружения – это чисто генеральская задача – дать команду на пуск.

6.5.1. Критерии максимального правдоподобия и идеального наблюдателя

Самый очевидный и простой критерий получается, если априорно появление цели или её отсутствие равнозначны. В этом случае полагают $\Lambda_n = 1$. Что более вероятно в отношении правдоподобия – числитель или знаменатель, в ту сторону и склоняются при принятии решения. Отсюда и название – критерий максимального правдоподобия. Уровень порогового значения по уровню зарегистрированного сигнала выбирается равным $z_n = S_m/2$, т.е. половине ожидаемой максимальной амплитуды полезного сигнала от цели после согласованной фильтрации.

Для формулировки критерия идеального наблюдателя предварительно все возможные ошибки принятия решений разделим на два класса. К первому классу отнесем ошибки типа пропуска цели. Это ошибки, возникающие при принятии решения об отсутствии цели, если на самом деле она была. Вероятность такой ошибки определяется как

$$P_{0,1} = p(S \neq 0) \int_{-\infty}^{z_n} f(z|1) dz,$$

где $p(S \neq 0)$ – безусловная (априорная) вероятность появления цели. Последствия от ошибки этого типа могут быть самыми катастрофическими, например, уничтожение наблюдателя.

Ко второму классу отнесем ошибки типа ложной тревоги. Это ошибки, возникающие при принятии решения о наличии цели, если на самом деле она отсутствовала. Вероятность такой ошибки определяется как

$$P_{1,0} = p(S = 0) \int_{z_n}^{\infty} f(z|0) dz,$$

где $p(S = 0) = 1 - p(S \neq 0)$ – безусловная (априорная) вероятность отсутствия цели. Последствия от ошибки этого типа могут быть не самыми катастрофическими, но неприятными, например ложный пуск ракет.

Критерий идеального наблюдателя по выбору порогового значения z_n заключается в требовании сведения к минимуму вероятности всех ошибок:

$$\min_{z_n} \{P_{0,1} + P_{1,0}\} = \min_{z_n} \left\{ p(S \neq 0) \int_{-\infty}^{z_n} f(z|1) dz + p(S = 0) \int_{z_n}^{\infty} f(z|0) dz \right\}. \quad (6.15)$$

Приравнивание к нулю производной по z_n от функции, стоящей в фигурных скобках, приводит к уравнению

$$\frac{p(S = 0)}{p(S \neq 0)} = \frac{f(z_n|1)}{f(z_n|0)} = \Lambda_n. \quad (6.18)$$

Само пороговое значение z_n находится как

$$z_n = \ln \frac{p(S = 0)}{p(S \neq 0)} + \frac{S_m}{2}.$$

Априорное знание повышает или понижает пороговое значение. Например, в мирное время вероятность появления самолетов потенциального противника менее вероятно, чем их отсутствие. В результате

$$\ln \frac{p(S=0)}{p(S \neq 0)} \geq 0,$$

и пороговое значение для пуска ракет увеличивается. В военное время ситуация обратная.

Сделаем два замечания:

1. К соотношению (6.18) можно подойти несколько с другой стороны, если переписать его как

$$l = \frac{f(z_n | 1)p(S \neq 0)}{f(z_n | 0)p(S = 0)} = \frac{f(z_n, S \neq 0)}{f(z_n, S = 0)} \equiv \Lambda_n^{\text{абс}}.$$

Это означает, что критерий идеального наблюдателя перекрывается с критерием максимального правдоподобия, если использовать абсолютные безусловные плотности вероятности при определении отношения правдоподобия.

2. В радиолокации в качестве целевой функции часто вводят не суммарную вероятность ошибок (6.15), а их стоимость потерь. Суммарная стоимость получается, если в (6.15) вероятности помножить на стоимости потерь от соответствующих ошибок, например α и β . Пороговое значение, учитывающее это, записывается как

$$z_n = \ln \frac{\alpha \cdot p(S=0)}{\beta \cdot p(S \neq 0)} + \frac{S_m}{2}.$$

6.5.2. Критерий Неймана – Пирсона

Критерий Неймана – Пирсона исходит из того, что наиболее фатальной является ошибка типа пропуски цели. Критерий формулируется так, что требует её минимизации при разумно заданной вероятности ложной тревоги, например, полагая

$$\int_{z_n}^{\infty} f(z|0) dz = C. \quad (6.19)$$

В этом случае задача является задачей на условный экстремум. Решается она путем минимизации по z_n функционала

$$\Phi(z_n, \lambda) = \int_{-\infty}^{z_n} f(z|1) dz + \lambda \int_{z_n}^{\infty} f(z|0) dz ,$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа. Для порогового значения $z_n(\lambda)$ получается уравнение

$$\frac{f(z_n|1)}{f(z_n|0)} = \lambda .$$

Согласно этому соотношению, неопределенный множитель λ сам и является пороговым значением Λ_n . Для нахождения его следует взять такое значение, чтобы уравнение (6.19) удовлетворялось. Так, например, для нормальных шумов уравнение (6.19) имеет вид

$$\int_{z_n}^{\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{z^2}{2S_m}\right\}}{\sqrt{2\pi S_m}} dz = C .$$

Заканчивая этот раздел, заметим, что на практике пороговое значение часто определяется чисто экспериментально.

6.6. Контрольные вопросы

- Что такое дисперсия ошибки воспроизведения при оптимальной фильтрации?
- Что такое согласованная фильтрация?
- Каковы искажения сигнала при корреляционном приеме?
- Что такое отношение правдоподобия?
- Какие типы ошибок возникают при принятии решений?
- Сформулировать основные критерии обнаружения.

Глава 7

СЛУЧАЙНЫЙ ВОЛНОВОЙ ПУЧОК И УГЛОВОЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР

В этой главе мы дадим краткий экскурс в теорию случайных полей, проведя обобщение случайных процессов на пространственные векторные поля. Наиболее простое обобщение теории случайных процессов на теорию случайных полей состоит в замене одного аргумента – времени у случайного процесса на вектор, т.е. пространственно-временные координаты. Подобную операцию мы уже делали, переходя к многомерным распределениям случайного процесса на множестве его сечений.

Говорят, что случайный процесс $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$, зависящий от пространственных координат $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ как от параметров, образует случайное поле. Для случайных полей применимы такие понятия теории случайных процессов, как законы распределения, характеристические функции и т.д. Понятие стационарности заменяется понятием статистической однородности, если статистические характеристики его не зависят от выбора начала координат. Понятие четности для корреляционных функций заменяется понятием изотропности полей. Вводится также понятие энергетического спектра пространственных частот, который связан с корреляционной функцией обобщенной теоремой Винера – Хинчина. Интегральный масштаб корреляции и ширина энергетического спектра связаны соотношением неопределенности, т.е. обратно пропорциональны друг другу. Примерами случайных полей являются: пространственное распределение значений диэлектрической проницаемости турбулентной атмосферы, распределение скоростей ветров на Земле, распределение высот рельефа местности и др.

Если некоторое случайное поле удовлетворяет волновому уравнению, то говорят о случайном волновом поле $E(\mathbf{r}, t)$. Такие поля возникают при распространении акустических и электромагнитных полей в случайно-неоднородных средах окружающего пространства. Теория этих

полей является предметом отдельного курса. Здесь же мы рассмотрим самые простейшие подходы, относящиеся к теории так называемых волновых пучков.

7.1. Пространственные частоты для волновых полей

Представим себе простейший пример волнового поля – случайный волновой пучок, который формируется распределением элементарных токов $j(\rho)$ по некоторой плоскости (апертуре) S с характерным размером a . Комплексная амплитуда создаваемой так волны описывается выражением

$$E(\mathbf{r}) = 2 \iint_S j(\rho) \frac{d}{dn} G(\mathbf{r} - \rho) dS, \quad (7.1)$$

где $G(\mathbf{R}) = \exp\{ik|\mathbf{R}|\}/4\pi|\mathbf{R}|$ – функция Грина свободного пространства, $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ – волновое число, $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ – точка наблюдения, ρ – точка локализации тока на поверхности S . Для функции Грина известно спектральное разложение по плоским волнам

$$G(\mathbf{R}) = \frac{i}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\mathbf{k}\mathbf{R}\} \frac{d\kappa_x d\kappa_y}{2\kappa_z},$$

$$\mathbf{k} = \left\{ \kappa_x, \kappa_y, \kappa_z = \sqrt{k^2 - \kappa_x^2 - \kappa_y^2} \right\}. \quad (7.2)$$

С учетом этого разложения для волнового пучка (7.1) можно записать спектральное разложение по плоским волнам:

$$E(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(\kappa_x, \kappa_y) \exp\{i\mathbf{k}\mathbf{r}\} \frac{d\kappa_x d\kappa_y}{(2\pi)^2}. \quad (7.3)$$

Здесь $E(\kappa_x, \kappa_y)$ представляет собой пространственный спектр волнового поля на поверхности начальной апертуры S и равняется

$$E(\kappa_x, \kappa_y) = \iint_S j(\rho) \exp\{-i\mathbf{k}\rho\} dS. \quad (7.4)$$

Эта величина описывает значения комплексных амплитуд составляющих плоских волн.

Перейдем теперь к статистическому усреднению, считая все введенные спектральные характеристики текущими спектрами случайных пространственных полей. Будем полагать, что элементарные токи $j(\rho)$ на поверхности S образуют статистически однородное изотропное поле с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$B(\rho) = \langle j(\rho_1 + \rho) j^*(\rho_1) \rangle.$$

с энергетическим спектром пространственных частот

$$W_j(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\rho) \exp\{-i\kappa\rho\} (d^2\rho).$$

Рассмотрим случай, когда характерный размер апертуры велик настолько, что сформированное токами волновое поле является статистически однородным и его корреляционная функция имеет вид

$$K(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle E(\mathbf{r}_1) E^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\kappa) \exp\{i\kappa(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\} \frac{d\kappa_x d\kappa_y}{(2\pi)^2}. \quad (7.5)$$

Для этого достаточно потребовать, чтобы выполнялось соотношение $a \gg \rho_0$, где ρ_0 – масштаб корреляции элементарных токов. Здесь в соответствии с обобщенной теоремой Винера – Хинчина функция $W(\kappa)$ представляет собой энергетический пространственный спектр флуктуаций волнового поля и, в свою очередь, выражается через корреляционную функцию поля с помощью обратного преобразования Фурье:

$$W(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\rho) \exp\{-i\kappa\rho\} (d^2\rho) \approx W_j(\kappa). \quad (7.6)$$

В соответствии с (7.5) интенсивность (дисперсия) волнового поля определяется как

$$\sigma_E^2 = \langle E(\mathbf{r}_1) E^*(\mathbf{r}_1) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\kappa) \frac{d\kappa_x d\kappa_y}{(2\pi)^2}. \quad (7.7)$$

Таким образом, функция $W(\kappa)$ описывает распределение интенсивности волн по пространственным частотам κ . С учетом выражений (7.3) – (7.6) путем непосредственных вычислений имеем

$$W(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\rho) \exp\{-i\kappa\rho\} (d^2\rho).$$

Это означает, что пространственный энергетический спектр волнового поля совпадает с пространственным энергетическим спектром поля элементарных токов на поверхности апертуры. Из соотношения неопределенности при этом следует, что ширина энергетического спектра обратно пропорциональна пространственному масштабу корреляции возбуждающих токов: $|\Delta\kappa| \approx 1/\rho_0$.

Введем понятие углового энергетического спектра. Имея ввиду, что вектор пространственных частот описывает направление распространения элементарных плоских волн с волновым числом $k = |\kappa|$, перейдем к угловым координатам этого вектора в сферической системе координат:

$$\kappa_x = k \sin \theta \cos \varphi, \quad \kappa_y = k \sin \theta \sin \varphi, \quad \kappa_z = k \cos \theta.$$

В этой системе координат

$$d\kappa_x d\kappa_y = k^2 \cos \theta \sin \theta d\varphi d\theta = k^2 \cos \theta d\Omega,$$

где через $d\Omega = \sin \theta d\varphi d\theta$ обозначен элементарный телесный угол. Согласно (7.7) для интегральной интенсивности волнового пучка можно записать

$$\sigma_E^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J(\theta, \varphi) d\Omega.$$

Введенная здесь функция

$$J(\theta, \varphi) = \frac{k^2 \cos \theta}{(2\pi)^2} W(\kappa)$$

представляет собой угловой энергетический спектр (индикатрису) волнового пучка, т.е. угловое распределение интенсивности волнового поля (рис. 24).

Угловая ширина этого распределения связана с шириной пространственного спектра как $\Delta\theta \approx |\Delta\kappa|/k$. Соответственно она оказывается обратно пропорциональна выраженному в длинах волн масштабу корреляции создающих поле токов: $\Delta\theta \approx 1/k\rho_0$.

Последний полученный результат имеет важное практическое значение, поскольку он устанавливает предел для создания узких волновых пучков большими апертурами. В случае малых апертур с характерным размером $a \leq \rho_0$ роль интегрального масштаба корреляции начинает играть размер апертуры, и тогда угловая ширина спектра оценивается как $\Delta\theta \approx 1/ka$.

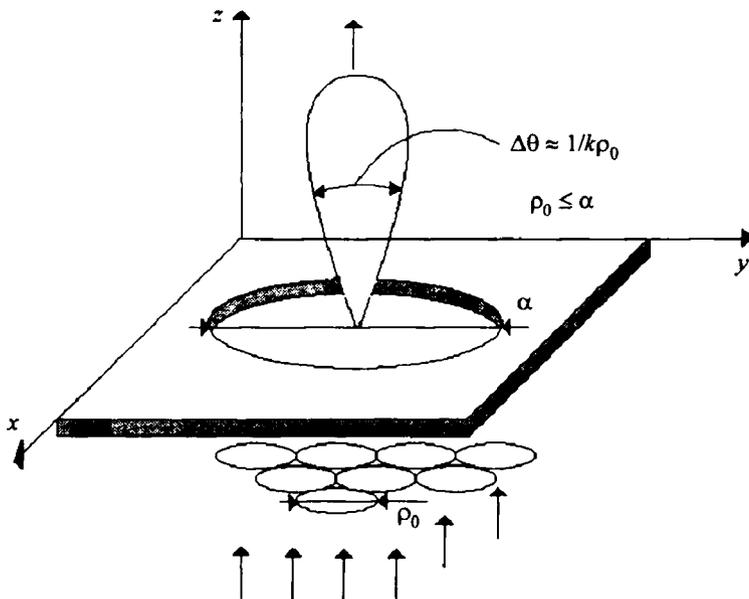


Рис. 24. Угловой энергетический спектр случайного волнового пучка

7.2. Контрольные вопросы

- Что такое пространственные частоты?
- Как влияет интегральный масштаб корреляции на ширину углового энергетического спектра случайного волнового пучка?

Глава 8

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

В предыдущих главах мы рассмотрели различные характеристики случайных процессов, встречающихся в радиофизике. Рассмотрение было бы не полным, если бы мы не коснулись такого важного момента, как информационное содержание СП. С одной стороны, кажется, что случайность процессов, их стохастичность должна только разрушать информационность сигналов. С другой – простейшие сигналы мало несут в себе информации, и только сложные сигналы обладают достаточной информационной емкостью. Но случайные процессы и являются обобщенной моделью сложных сигналов. Возникает кажущееся противоречие: чем больше шумов, тем меньше информации и чем больше стохастичности, тем её больше. Чтобы разобраться с этим, обратимся к количественному определению информации.

8.1. Количественное определение информации

Для простоты ограничим себя сразу рассмотрением дискретной информации, переносимой некоторыми символами, например цифрами, буквами, знаками и т.д. Под информацией будем понимать совокупность сведений ими переносимыми. Попытаемся ввести меру этой информации.

Пусть в некотором сообщении содержится N различных символов $\{x_n\}$. Вся совокупность этих символов образует алфавит сообщения, число N является его объемом. Будем считать, что символы взаимно независимы и $p_n = P(x_n)$ – вероятность появления отдельного символа в сообщении. Из общих соображений понятно, что информация, доставляемая отдельным символом, зависит от вероятности его появления:

$$I_n = \varphi(p_n). \quad (8.1)$$

При этом должно выполняться два условия. Во-первых, информация, доставляемая двумя независимыми символами, равна сумме информа-

ции, доставляемой каждым символом. Во-вторых, если какой-то символ априорно известен, то информация, доставляемая им, равна нулю. Математически эти два условия записываются соответственно как

$$\varphi(p_n p_m) = \varphi(p_n) + \varphi(p_m); \quad (8.2)$$

$$\varphi(p_n = 1) = 0. \quad (8.3)$$

Установим вид этой функции.

Продифференцируем (8.2) по p_n и затем помножим обе части уравнения на p_n . В результате имеем

$$p_n p_m \varphi'(p_n p_m) = p_n \varphi'(p_n).$$

Поскольку в общем случае p_n и p_m относительно произвольные величины, то должно выполняться равенство

$$p_n \varphi'(p_n) = C_1 = \text{const}.$$

Общее решение возникающего простейшего дифференциального уравнения задается формулой

$$\varphi(p_n) = C_1 \ln(p_n) + C_2.$$

Используя условие (8.3) как начальное, получаем, что самым общим представлением меры информации является функция

$$\varphi(p_n) = C_1 \ln(p_n). \quad (8.4)$$

Константа C_1 связана с выбором системы единиц. Если за единицу информации (1 бит) взять такое её количество, которое доставляется одним из двух равновероятных символов ($p_1 = p_2 = 1/2$), то тогда

$$1 \text{ бит} = C_1 \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

и величина $C_1 = -1/\ln(2)$. В целом получаем, что

$$\varphi(p_n) = -\log_2(p_n) \text{ [бит]}.$$

При выборе другого основания у логарифма получаются другие единицы информации. Например,

$$\varphi(p_n) = -\log_8(p_n) \text{ [байт]}.$$

Другими менее распространенными единицами являются

$$\varphi(p_n) = -\ln(p_n) \text{ [непер]},$$

$$\varphi(p_n) = -\lg(p_n) \text{ [дит]}.$$

В общем случае будем писать, не конкретизируя основание:

$$I_n = \varphi(p_n) = -\log(p_n).$$

Очевидно, собственная информация конкретного символа не может быть отрицательной, $I_n \geq 0$.

8.2. Средняя собственная и взаимная информация

Величина информации, определяемая (8.1), является безусловной собственной информацией символа. Она определена нами для независимых символов. Отдельные символы могут быть взаимозависимы. Например, при передаче сообщения через канал связи выходные символы $\{y_k\}$ взаимозависят от входных символов $\{x_n\}$. Тогда говорят об условной вероятности появления символов $P(y_k|x_n) = P(y_k, x_n)/P(x_n)$ и условной информации

$$I(y_k|x_n) = -\log P(y_k|x_n)$$

и аналогично

$$I(x_n|y_k) = -\log P(x_n|y_k).$$

Можно говорить о взаимной информации, доставляемой символом $\{y_k\}$ о символе $\{x_n\}$, определяемой как разность

$$I(x_n; y_k) = I(x_n) - I(x_n|y_k) = -\log P(x_n) + \log P(x_n|y_k).$$

Взаимная информация симметрична:

$$\begin{aligned} I(x_n; y_k) &= -\log \frac{P(x_n)P(y_k)}{P(x_n|y_k)P(y_k)} = -\log \frac{P(x_n)P(y_k)}{P(x_n, y_k)} = \\ &= -\log \frac{P(x_n)P(y_k)}{P(y_k|x_n)P(x_n)} = I(y_k; x_n). \end{aligned}$$

Эта информация является мерой передаваемой элементарной информации.

От символа к символу элементарная информация меняется, и так как, вообще говоря, символы являются случайными, то случайной величиной является и элементарная информация. Определим среднюю собственную информацию как информацию, приходящуюся в среднем на один символ сообщения:

$$\langle I(x_n) \rangle = -\sum_n p_n \log p_n \equiv H(\bar{x}).$$

В теории информацию её также называют энтропией сообщения.

Средняя взаимная информация определяется аналогично:

$$\begin{aligned} \langle I(x_n; y_k) \rangle &= - \sum_n \sum_k P(x_n, y_k) \log \frac{P(x_n)P(y_k)}{P(x_n, y_k)} = \\ &= H(\bar{x}) - H(\bar{x}|\bar{y}) = H(\bar{y}) - H(\bar{y}|\bar{x}) \equiv H(\bar{x}; \bar{y}). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Она характеризует, сколько информации содержится в среднем в одном выходном символе об одном входном символе и наоборот.

8.3. Свойства средней собственной и взаимной информации

Перечислим основные свойства средней информации:

1. При полностью достоверном приеме средняя взаимная информация совпадает с энтропией сообщения: $H(\bar{x}; \bar{x}) = H(\bar{x})$. Свойство вытекает из равенства $H(\bar{x}|\bar{x}) = 0$.

2. При полностью недостоверном приеме средняя взаимная информация равна нулю: $H(\bar{x}; \bar{y}) = H(\bar{x}) - H(\bar{x}) = 0$.

3. В общем случае средняя взаимная информация не отрицательна: $H(\bar{x}; \bar{y}) \geq 0$. Для доказательства, используя (8.4), запишем

$$H(\bar{x}; \bar{y}) = - \sum_n \sum_k P(x_n | y_k) P(y_k) \log \frac{P(x_n)}{P(x_n | y_k)}.$$

Воспользуемся неравенством: $-\ln x \geq 1 - x$, так что

$$H(\bar{x}; \bar{y}) \geq \log e \sum_n \sum_k P(x_n | y_k) P(y_k) \left[1 - \frac{P(x_n)}{P(x_n | y_k)} \right] = 0.$$

Утверждение доказано.

4. Энтропия максимальна при полностью неопределенной ситуации, т.е. при равновероятном распределении символов сообщения.

Найдем распределение вероятностей p_n , при котором энтропия сообщения

$$H(\bar{x}) \equiv - \sum_n p_n \log p_n$$

максимальна. Необходимо только учесть, что

$$\sum_n p_n = 1.$$

Сформулируем функционал для задачи на условный экстремум:

$$F(p_1, p_2, \dots, p_n) = -\sum_n p_n \log p_n + \lambda \left[\sum_n p_n - 1 \right].$$

Здесь λ – множитель Лагранжа. Простое нахождение экстремума приводит к уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial p_n} = -\log e[\ln p_n + 1] + \lambda = 0,$$

откуда следует $p_n = \text{const}$, т.е. не зависит от n . Условие нормировки дает, что $p_n = 1/N$. Утверждение доказано. Нетрудно подсчитать, что само максимальное значение энтропии при этом равно $H(\bar{x}) = \log N$.

8.4. Пропускная способность канала. Теорема Шеннона о помехоустойчивом кодировании

Представим себе обобщенную схему канала связи (рис. 25) в виде последовательности элементов: 1) источник сообщения, формирующий символы $\{x_n\}$; 2) кодер, шифрующий исходные символы путем однозначного перевода в другие символы $\{\xi_n\}$; 3) канал связи, вообще говоря, добавляющий внешние шумы, разрушающий достоверность передачи и доставляющий символы $\{\zeta_k\}$; 4) декодер, на выходе которого сообщение декодируется и проявляются символы $\{y_k\}$, поступающие потребителю информации.



Рис. 25. Обобщенная схема радиоэлектронной системы

Качество канала связи оценивается, в конечном счете, по количеству средней взаимной информации, передаваемой по нему в единицу времени. Эта величина называется скоростью передачи информации:

$$v = \frac{H(\bar{\xi}; \bar{\zeta})}{\tau}.$$

Здесь τ – время, затрачиваемое на передачу одного символа. Скорость передачи информации зависит, с одной стороны, от качества канала, а с другой – от закона распределения информации по символам. Максимально возможное её значение называется пропускной способностью канала связи.

Шеннон на этот счет доказал основополагающую теорему:

«Существует по крайней мере одна процедура кодирования сообщения, при которой информация может передаваться со скоростью меньшей, но сколь угодно близкой к пропускной способности канала при произвольно малой вероятности ошибок».

8.5. Контрольные вопросы

- Каковы единицы измерения информации?
- Что такое энтропия сообщения?
- Как соотносятся средняя собственная и взаимная информации?
- Когда энтропия сообщения максимальна?
- Что такое пропускная способность канала связи?
- Сформулировать теорему Шеннона.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные в учебнике вопросы составляют минимум теоретических сведений, необходимых для понимания и применения статистических методов, используемых в современной радиофизике. Для изложения были выбраны вопросы, имеющие общее значение. Дальнейшее развитие методов статистической радиофизики сопряжено с конкретными приложениями и требует самостоятельного изучения по каждому конкретному направлению. Думается, что изложенные в учебнике сведения носят мировоззренческий характер и позволят без большого труда понять и овладеть различными широко распространенными компьютерными пакетами обработки данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. – М.: Наука, 1981. – 640 с.
2. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1, 2. – М.: Наука, 1976. – 496 с.
3. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
4. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. – М.: Сов. радио, 1974. – 552 с.; Кн. 2. – М.: Сов. радио, 1968. – 504 с.
5. *Пономарев Г.А., Пономарева В.Н., Якубов В.П.* Статистические методы в радиофизике: Практикум с применением диалого-вычислительных комплексов. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. – 235 с.
6. *Растригин Л.А.* Этот случайный, случайный, случайный мир. – М.: Молодая гвардия, 1974. – 208 с.
7. *Венцель Е.С.* Теория вероятностей. – М.: Физматлит, 1962. – 564 с.
8. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
9. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований. – М.: Сов. радио, 1978. – 376 с.
10. *Тихонов В.И.* Нелинейные преобразования случайных процессов. – М.: Радио и связь, 1986. – 296 с.
11. *Кукес И.С., Старик М.И.* Основы радиопеленгации. – М.: Сов. радио, 1964. – 640 с.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Владимир Петрович Якубов

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА

Учебное пособие

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортес*

К-ОКП ОК-005-93, код продукции 954240

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 15.08.2006.
Формат 60 × 84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 7,67. Уч.-изд. л. 8,59. Тираж 300 экз. Заказ № 21.

ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Отпечатано в типографии ЗАО «М-Принт», г. Томск, ул. Пролетарская, 38/1
Переплет ОАО «Издательство Асиновское», г. Асино, ул. Проектная, 24



ЯКУБОВ

Владимир Петрович

Окончил радиофизический факультет Томского государственного университета. Профессор, доктор физико-математических наук, зав. кафедрой радиофизики ТГУ и отделения радиофизики и радиоэлектроники СФТИ. Автор более 150 научных работ в отечественной и зарубежной печати, посвященных исследованию распространения радиоволн в околоземном и космическом пространстве и теории обратных задач. Член-корреспондент Метрологической академии Российской Федерации, Международной академии высшей школы и Российской академии естественных наук, почетный работник высшего профессионального образования. Член редколлегии журналов "Оптика атмосферы и океана" и "Известия вузов. Радиотехника". Лауреат премии Томской области в сфере образования и науки, премии Томского государственного университета.

